PERDA DE PROTENSÃO POR ATRITO

Jorge de Mello e Souza

INTRODUÇÃO

As perdas de protensão por atrito costumam ser calculadas supondo-se que o raio de curvatura do eixo do cabo seja constante.

Muitas vezes, porém, o eixo do cabo não pode, nem como aproximação, ser considerado circular. Tal ocorre em cascas, vigas curvas, vigas caixão e outras estruturas protendidas; para acomodar as necessidades do levantamento do cabo com a configuração da estrutura, o seu eixo passa a ser uma curva reversa.

Neste trabalho desenvolvem-se fórmulas para o cálculo de perdas de protensão por atrito para cabos descrevendo curvas quaisquer.

PERDA POR ATRITO EM CABOS CIRCULARES

Considere-se (Fig. 1) um elemento curvo de cabo e as forças que nele atuam. As duas forças F e $F+dF$ têm uma resultante dN, normal ao cabo e dada por:

$$dN = F\,d\theta = F\frac{ds}{R} \tag{1}$$

sendo R o raio de curvatura. A força de atrito vale:

$$dF = -\mu\,dN \tag{2}$$

sendo μ o coeficiente de atrito. A equação diferencial é obtida substituindo (2) em (1):

$$dF = -\mu\,F\frac{ds}{R} \tag{3}$$

Sendo constante o raio de curvatura, é fácil integrar a eq. (3) chegando-se a:

$$F_f = F_i\;e^{-\mu\frac{L}{R}} \tag{4}$$

onde:

F_f = força de protensão no fim do cabo;
F_i = força de protensão aplicada no início do cabo;
L = comprimento do cabo.

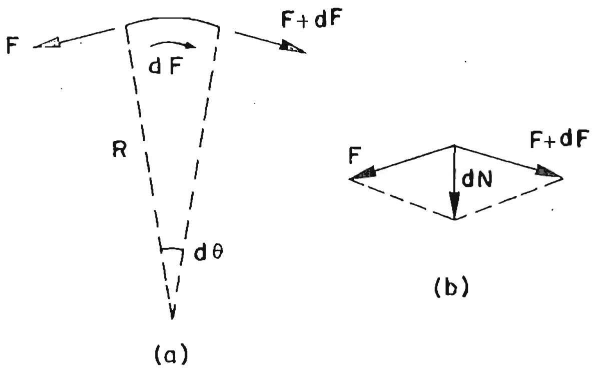

Figura 1

RAIO DE CURVATURA

Seja um sistema coordenado e o eixo do cabo formando uma curva reversa. O vetor de posição é:

$$\underset{\sim}{r} = x(s)\,\underset{\sim}{i} + y(s)\,\underset{\sim}{j} + z(s)\,\underset{\sim}{k} \qquad (5)$$

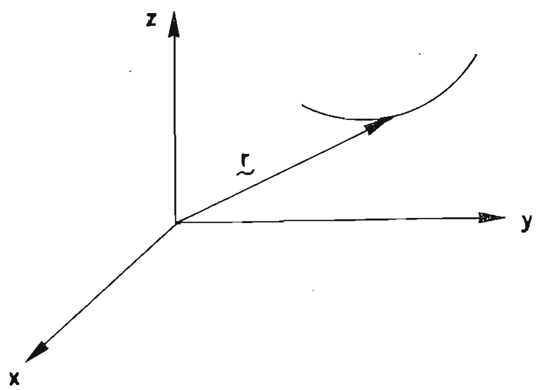

Figura 2

O comprimento da curva entre uma origem arbitrária e um ponto genérico é s. A curvatura, por definição, vale

$$\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{ds^2} = k\,\underset{\sim}{v} \qquad (6)$$

onde $\underline{k}$ é a curvatura e $\underset{\sim}{v}$ um vetor unitário de sentido tal que $\underline{k}$ seja sempre positivo.

O vetor tangente unitário $\underset{\sim}{t}$ vale

$$\underset{\sim}{t} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{ds}, \quad \underset{\sim}{t}\cdot\underset{\sim}{t} = 1 \qquad (7)$$

Se, em lugar de s, for usada uma variável qualquer u,

$$\left(\frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\,\frac{du}{ds}\right)\cdot\left(\frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\,\frac{du}{ds}\right) = 1 \qquad (8)$$

ou

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{d\underset{\sim}{r}}{du}\cdot\dfrac{d\underset{\sim}{r}}{du}}} \qquad (9)$$

e, portanto,

$$\underset{\sim}{t} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{ds} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\cdot\frac{du}{ds} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\left(\frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\cdot\frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\right)^{-1/2} \qquad (10)$$

Introduz-se aqui a notação

$$\frac{d(\ )}{du} = (\ )' \qquad (11)$$

A derivada seguida de u em relação a s tem o valor

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}\right) = \frac{du}{ds}\,\frac{d}{du}\left(\frac{du}{ds}\right) = \frac{du}{ds}\,\frac{d}{du}\,(\underset{\sim}{r}'\cdot\underset{\sim}{r}')^{-1/2} \qquad (12)$$

mas,

$$\frac{d}{du}(\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}')^{-1/2} = \frac{-1}{2}(\underset{\sim}{r}'.r')^{-3/2}\ (\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}' + \underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}'') =$$

$$= -\ \frac{\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}'}{(r'.r')^{-3/2}} \qquad (13)$$

E, finalmente,

$$\frac{d^2u}{ds^2} = (\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}')^{-1/2}\ \frac{(-\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}')}{(r'.r')^{3/2}} = -\frac{\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}'}{(r'.r')^2} \qquad (14)$$

O vetor curvatura com as equações (6) e (10) vale:

$$\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\ \frac{du}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\right)\frac{du}{ds} +$$

$$+\ \frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\ \frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}\right) \qquad (15)$$

ou seja:

$$\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{ds^2} = \frac{du}{ds}\ \frac{d}{du}\left(\frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\right)\frac{du}{ds} + \frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\ \frac{d^2u}{ds^2} =$$

$$= \frac{d^2\underset{\sim}{r}}{du^2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{d\underset{\sim}{r}}{du}\ \frac{d^2u}{ds^2} \qquad (16)$$

Substituindo-se os resultados das eqs. (9) e (14):

$$\frac{d^2\underset{\sim}{r}}{ds^2} = \frac{\underset{\sim}{r}''}{\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}'} - \underset{\sim}{r}'\ \frac{(\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}')}{(\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}')^2} \qquad (17)$$

Com a eq. (6) tem-se, para o quadrado da curvatura:

$$k^2 = \frac{d^2\underset{\sim}{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\underset{\sim}{r}}{ds^2} = \frac{(\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}'')\ (\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}') - (\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}')^2}{(\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}')^3} \qquad (18)$$

Considere-se um cabo em curva reversa, cuja projeção em dois planos ortogonais seja conhecida, Fig. 3. O vetor posição deste cabo é

$$\underset{\sim}{r} = x\,\underset{\sim}{i} + y(x)\,\underset{\sim}{j} + z(x)\,\underset{\sim}{k} \qquad (19)$$

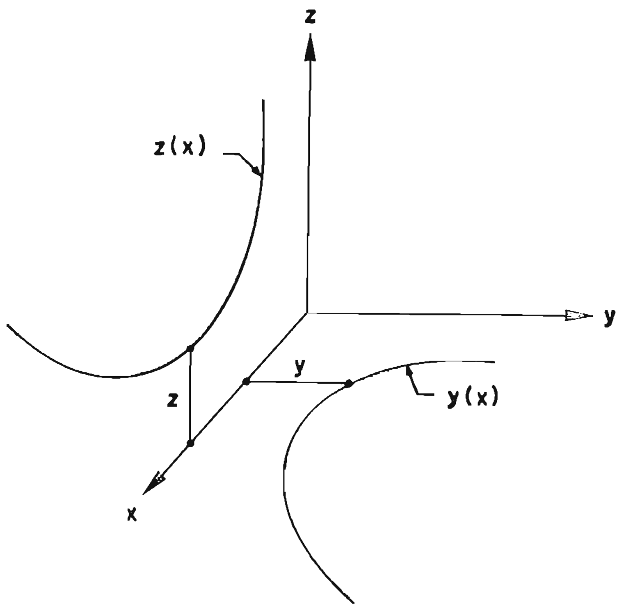

Figura 3

A variável u que foi introduzida será feita igual a x. Tem-se:

$$\underset{\sim}{r}' = \underset{\sim}{i} + y'\underset{\sim}{j} + z'\underset{\sim}{k} \qquad (20)$$

$$\underset{\sim}{r}'' = y''\underset{\sim}{j} + z''\underset{\sim}{k} \qquad (21)$$

$$\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}' = 1 + y'^2 + z'^2 \qquad (22)$$

$$\underset{\sim}{r}'.\underset{\sim}{r}'' = y'y'' + z'z'' \qquad (23)$$

$$\underset{\sim}{r}''.\underset{\sim}{r}'' = y''^2 + z''^2 \qquad (24)$$

Colocando-se estes resultados na eq. (18) chega-se a:

$$\frac{1}{R^2} = k^2 = \frac{y''^2 + z''^2 + (z'y'' - y'z'')^2}{(1 + y'^2 + z'^2)^3} \qquad (25)$$

Considere-se a eq. (3); sendo

$$ds = dx \sqrt{1 + y'^2 + z'^2} \qquad (26)$$

tem-se:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dF}{F} = \frac{\sqrt{y''^2 + z''^2 + (z'y'' - y'z'')^2}}{1 + y'^2 + z'^2} \qquad (27)$$

Chamando-se G(x) a integral da função do lado direito da eq. (27) tem-se:

$$\log . F = \mu \; G(x) \qquad (28)$$

ou

$$F = F_i \; e^{-\mu \, [G(x) - G(x_i)]} \qquad (29)$$

De um modo geral, a determinação de G(x) deve ser feita numericamente.

EXEMPLO

Determinar a perda de protensão por atrito no meio do vão de um cabo numa casca cilíndrica. Admite-se que a projeção do cabo no plano z–x seja uma parábola do segundo grau. (V. Fig. 4.)

A projeção do cabo no plano *z-x* será:

$$z(x) = h \left[\frac{4x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1\right] + z_0 \qquad (30)$$

A equação da casca é

$$y^2 + z^2 = a^2 \qquad (31)$$

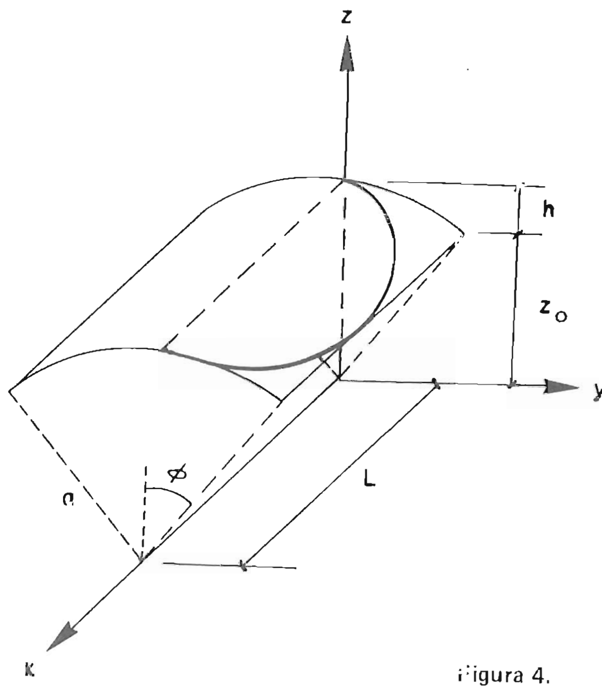

Figura 4.

sendo

$0 < x < L$

$z \geqslant a \cos \phi$

$-a \operatorname{sen} \phi \leqslant y \leqslant a \operatorname{sen} \phi$

Da eq. (31):

$$y = \sqrt{a^2 - z^2} \qquad (32)$$

Substituindo-se z(x) em (32) por seu valor dado em (30) tem-se:

$$y = \sqrt{a^2 - \left[h\left(\frac{4x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1\right) + z_0\right]^2} \qquad (33)$$

Pode-se verificar que
$y(o) = y(L) = 0$
$y(L/2) = a \operatorname{sen} \phi$

As derivadas de *z(x)* em relação a *x* valem:

$$z' = \frac{8hx}{L^2} - \frac{4h}{L} \qquad (34)$$

$$z'' = \frac{8h}{L^2} \qquad (35)$$

As derivadas de *y* em relação a *z* valem:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{-z}{\sqrt{a^2 - z^2}} \qquad (36)$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{-a^2}{(a^2 - z^2)^{3/2}} \qquad (37)$$

As derivadas de *y* em relação a *x* são [v. eq. (16)]:

$$y' = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{-zh}{\sqrt{a^2 - z^2}}\left(\frac{8x}{L^2} - \frac{4}{L}\right) \qquad (38)$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2}\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dz}\frac{d^2z}{dx^2} =$$

$$= \frac{-a^2h}{(a^2 - z^2)^{3/2}}\left(\frac{8x}{L^2} - \frac{4}{L}\right)^2 - \frac{z}{(a^2 - z^2)^{1/2}}\frac{8h}{L^2} \qquad (39)$$

As eqs. (34), (35), (38) e (39) são colocadas na eq. (27) e a integral é feita numericamente, com a regra de Simpson, por exemplo.

Prof. Jorge de Mello e Souza

Engenheiro civil pela PUC/RJ, fez seu mestrado na mesma universidade, o doutorado na Rice University e o pós-doutorado na University of California, Berkeley.
Lecionou na PUC/RJ, na Universidade Federal do Pará e na University of California.
Professor Titular da Seção de Mecânica do IME.