

# Sistema de pesagem de carga em movimento sobre uma viga flexível empregando medida indireta da massa

Matheus A Michelon\*, Maurício Gruzman, Aldélio B Caldeira.

Instituto Militar de Engenharia  
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270,  
Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

\*matheus\_michelon@hotmail.com

**RESUMO:** Este trabalho analisa a viabilidade de um sistema de pesagem em movimento. O sistema funciona através da medida indireta da massa de uma carga móvel aplicada a uma viga flexível biapoiada. Técnicas de problema inverso de estimativa de parâmetros foram utilizadas na medição indireta da massa. A solução do problema inverso se dá através dos métodos Gradiente Conjugado e Particle Swarm Optimization. Medidas experimentais, obtidas na literatura, foram utilizadas. Na solução do problema direto foi empregada solução numérica pelo Método de Elementos Finitos. O desempenho dos métodos de otimização na estimativa da massa da carga móvel foi avaliado.

**PALAVRAS-CHAVE:** WIM, carga móvel, vibrações, MEF, problema inverso.

**ABSTRACT:** This paper analyzes the feasibility of a weighing in motion system. The system works by indirectly measuring the mass of a moving load applied to a flexible simple supported beam. Inverse problem techniques of the parameter estimation are used in the indirect measurement of the mass. The solution of the inverse problem is given by the Conjugate Gradient and Particle Swarm Optimization methods. Experimental measurements, from the literature, are used. In the solution of the direct problem is used numerical solution by the Finite Element Method. The performance of the optimization methods in the estimation of the mass of the moving load is evaluated.

**KEYWORDS:** WIM, moving load, vibration, FEM, inverse problem.

## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente a redução de custos e desperdícios tem se tornado cada vez mais importante. Nesse contexto, o controle do peso de cargas transportadas em rodovias e ferrovias se apresenta como uma importante ferramenta na conservação das vias.

Os sistemas de pesagem em movimento, ou *weight-in-motion* (WIM), são os sistemas de pesagem mais utilizados devido à sua agilidade de emprego, principalmente em rodovias. Dentre os sistemas WIM existentes, os que utilizam células de carga são os mais utilizados. Esses sistemas são compostos de uma estrutura metálica semelhante a uma ponte, apoiada sobre células de carga, que medem o peso do veículo. Em alguns sistemas podem ser necessárias mais de vinte unidades de células de carga [1].

Esse trabalho avalia a possibilidade de uma alternativa aos sistemas WIM de células de carga. O sistema proposto funciona através da medida indireta da massa de uma carga móvel, como um veículo, que se desloca em velocidade constante sobre uma viga biapoiada, que serve de modelo de uma ponte. Medições da deflexão da viga, obtidas a partir de um sensor instalado na mesma, fornecem os dados experimentais. Uma modelagem matemática da viga sujeita à uma carga móvel foi realizada através de uma solução numérica pelo Método de Elementos Finitos (MEF) forneceu valores aproximados da deflexão da viga. A partir da solução do problema direto, pelo MEF, e das medidas experimentais de deflexão da viga, técnicas de problema inverso estimam a massa da carga móvel.

O interesse na análise dinâmica de vigas sujeitas a cargas móveis vem desde o século 19. Inicialmente foram propostas soluções analíticas para o problema, tendo sido adotadas algumas simplificações devido à complexidade das equações diferenciais parciais que governam o problema. Dentre as principais simplificações estão: consideração da velocidade da carga móvel constante, desconsideração de seu efeito de inércia sobre a viga tomando-a como uma força móvel

e viga com amortecimento nulo. Abordagens do problema pelo MEF, são propostas desde o século passado, como por exemplo Cifuentes em 1986 [2] e 1989 [3], Lin em 1990 [4], Rieker em 1996[5], Wu, Whittaker, e Cartmell em 2001 [6], Wu em 2008 [7], Kahya em 2012[8], Esen em 2011 [9], 2013 [10], 2015 [11], e Koç em 2016 [12], entre outros. A versatilidade do MEF proporciona a facilidade de inserção dos efeitos mencionados, desconsiderados em simplificações do problema.

As técnicas de problema inverso são ferramentas poderosas para estimar propriedades de um sistema usando medidas indiretas [13]. Dessa forma, através de medições da deflexão de uma viga flexível, pode-se estimar a massa de uma carga móvel que a atravessa. Para resolver o problema inverso, um método de otimização minimiza a soma de erros quadrados entre dados estimados e dados experimentais [14].

Na solução do problema inverso de estimativa da massa da carga móvel são empregadas as técnicas de otimização gradiente conjugado (GC) e *Particle Swarm Optimization* (PSO).

## 2. MATERIAIS E MÉTODOS

Nesta seção são apresentados os procedimentos utilizados para formulação do sistema de pesagem em movimento proposto nesse trabalho, composto por: modelagem do problema direto, dados experimentais e técnicas de solução do problema inverso para estimativa da massa da carga móvel.

### 2.1 Modelagem do problema direto

O problema de uma viga sujeita à carga móvel é representado na Fig.1. Na solução do problema pelo MEF, o corpo contínuo é discretizado, sendo a viga dividida em partes menores, chamadas elementos finitos. Dessa forma é obtida uma aproximação do comportamento dinâmico do corpo contínuo.

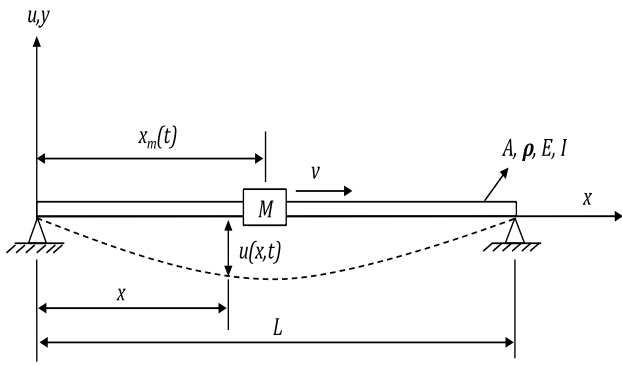


Fig. 1 – Viga flexível biopoiada sujeita à massa móvel. Fonte: autor.

onde,  $x_m, v$  e  $M$  são a posição, velocidade e massa da carga móvel respectivamente,  $A, \rho, E, I, L$  e  $u(x, t)$  são a área da seção transversal, a massa específica, o módulo de elasticidade, o momento de inércia de área da seção transversal, o comprimento e a deflexão vertical da viga respectivamente.

A viga foi dividida em  $n$  elementos iguais, com um nó em cada extremidade, totalizando  $n+1$  nós. São definidos dois tipos de movimento em cada nó, transversal e angular, obtendo-se elementos finitos com quatro graus de liberdade. A viga discretizada é representada na Fig.2.

Conforme apresentado por Clough e Penzien (2003) [15], as matrizes de massa e rigidez que representam cada elemento finito, encontram-se nas Eq. 1 e 2. Utilizando-se matrizes de transformação de coordenadas, as matrizes de cada elemento são transformadas para as coordenadas globais e somando-as obtêm-se as matrizes que representam o corpo contínuo.

$$[M_E] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$[K_E] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde,

$$m_{ij_E} = \int_0^{L_E} (\rho(x_E)A(x_E)\psi_{i_E}(x_E)\psi_{j_E}(x_E)dx_E), i, j \text{ de } 1 \text{ à } 4 \quad (3)$$

$$k_{ij_E} = \int_0^{L_E} (E(x_E)I(x_E)\psi_{i_E}''(x_E)\psi_{j_E}''(x_E)dx_E), i, j \text{ de } 1 \text{ à } 4 \quad (4)$$

$$\psi_1(x_E) = 1 - 3\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 + 2\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \quad (5)$$

$$\psi_2(x_E) = L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right) - 2L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 + L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \quad (6)$$

$$\psi_3(x_E) = 3\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 - 2\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \quad (7)$$

$$\psi_4(x_E) = -L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^2 + L_E\left(\frac{x_E}{L_E}\right)^3 \quad (8)$$

$\psi_1(x_E), \psi_2(x_E), \psi_3(x_E)$  e  $\psi_4(x_E)$  são funções de interpolação de terceiro grau,  $2$  o comprimento,  $\rho(x_E)$  a massa específica,  $A(x_E)$  a área da seção transversal,  $E(x_E)$  o módulo de elasticidade,  $I(x_E)$  o momento de inércia de área da seção transversal, todos referentes ao elemento finito.

A partir das matrizes de massa e rigidez da viga obtêm-se a matriz de amortecimento, utilizando-se o conceito de amortecimento proporcional de Rayleigh, Eq. 9-11 [7].

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{2\omega_i\omega_j(\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (10)$$

$$\beta = \frac{2(\xi_j\omega_j - \xi_i\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \quad (11)$$

$\alpha$  e  $\beta$  são os coeficientes de amortecimento proporcional,  $\xi_i$  e  $\xi_j$  são relações de amortecimento correspondentes a duas frequências naturais do sistema estrutural,  $\omega_i$  e  $\omega_j$ .

Assim a equação do movimento que representa a viga pode ser escrita da seguinte forma,

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = F(t) \quad (12)$$

onde  $[M]$  é a matriz de massa,  $[C]$  é a matriz de amortecimento,  $[K]$  é a matriz de rigidez da viga.  $U$  é o vetor de deslocamentos verticais e angulares de cada nó e  $F$  é o vetor de forças que atuam na viga, fruto da interação da viga e da carga móvel devido seu deslocamento.

Por fim é realizada a modelagem da carga móvel. Ela será modelada como uma massa móvel, ou seja, seu efeito de inércia sobre a viga é considerado. Assim, a força de interação entre a viga e a massa móvel pode ser representada conforme abaixo,

$$F = -M\left(g + \frac{d^2u(x_m, t)}{dt^2}\right)\delta(x - x_m) \quad (13)$$

sendo,  $\delta(x - x_m)$  a função delta de Dirac,  $x_m$  a posição da carga móvel na viga,  $g$  a aceleração da gravidade e  $M$  a massa da carga móvel [16].

Com o deslocamento da carga móvel sobre a viga, a força expressa na Eq. 13 estará sendo aplicada a cada instante de tempo em um elemento finito e em um ponto desse elemento. A Fig. 3 representa as forças nodais em um elemento finito,  $E_j$ , em um instante de tempo. As duas componentes da força aplicada, gravitacional,  $f_{gE_j}$  e inercial,  $f_{iE_j}$  são transformadas para os nós através das funções de interpolação, Eq. 5-8, obtendo-se as forças aplicadas no elemento, Eq. 14 e 15.

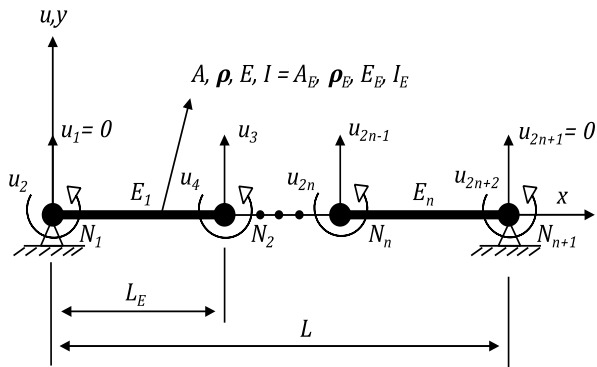


Fig. 2 – Viga flexível biapoiada discretizada. Fonte: autor.

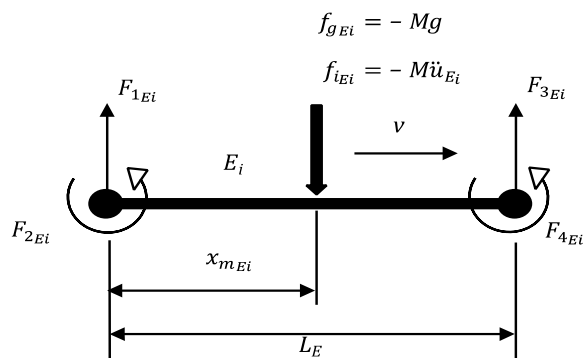


Fig. 3 – Forças nodais. Fonte: autor.

$$F_{gE_i} = -Mg \begin{Bmatrix} \psi_1(x_{mE_i}) \\ \psi_2(x_{mE_i}) \\ \psi_3(x_{mE_i}) \\ \psi_4(x_{mE_i}) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$F_{iE_i} = -M \begin{bmatrix} \psi_1^2 & \psi_1\psi_2 & \psi_1\psi_3 & \psi_1\psi_4 \\ \psi_2\psi_1 & \psi_2^2 & \psi_2\psi_3 & \psi_2\psi_4 \\ \psi_3\psi_1 & \psi_3\psi_2 & \psi_3^2 & \psi_3\psi_4 \\ \psi_4\psi_1 & \psi_4\psi_2 & \psi_4\psi_3 & \psi_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{1E_i} \\ \ddot{u}_{2E_i} \\ \ddot{u}_{3E_i} \\ \ddot{u}_{4E_i} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

sendo,  $x_E = x_{mE_i}$ , a posição da carga móvel no elemento.

A força global aplicada à viga, é obtida aplicando-se as Eq. 14 e 15 aos graus de liberdade correspondentes ao elemento em que a carga móvel se encontra no vetor de força global. A força aplicada no restante dos graus de liberdade é nula.

A equação do movimento final que representa a viga pode ser expressa por,

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = F_g(t) + F_i(t) \quad (16)$$

$$[M]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = F_g(t) - [m(t)]\ddot{u}(t) \quad (17)$$

$$[M + m(t)]\ddot{u}(t) + [C]\dot{u}(t) + [K]u(t) = F_g(t) \quad (18)$$

onde,  $m(t)$ , é a matriz de massa, referente ao efeito iner-

cial provocado na viga pela passagem da carga móvel, calculada a cada instante de tempo.

A Eq. 18 é um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO) de segunda ordem. Para sua solução é empregado um método numérico de integração, o método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Uma vez que a equação do movimento do modelo desenvolvido é composta por componentes que precisam ser calculados em cada instante de tempo, é necessário determinar a posição da carga móvel em cada instante de tempo de integração da Eq. 18. Para o cálculo da posição da carga móvel na viga é utilizada a Eq. 19, que corresponde a um movimento com velocidade constante.

Necessita-se também determinar em que elemento do corpo discretizado a carga móvel encontra-se,  $E_i$ , sendo utilizada a Eq. 20. Por fim calcula-se a posição da carga móvel no elemento de viga,  $x_{mE_i}$ , Eq. 21; esse dado é utilizado para o cálculo das funções de interpolação a cada instante de tempo.

$$x_m = x_{m0} + vt \quad (19)$$

$$E_i = (\text{parte inteira de } X_m) + 1, \quad X_m = \frac{x_m}{L_e} \quad (20)$$

$$x_{mE_i} = x_m - L_e(E_i - 1) \quad (21)$$

onde,  $X_m$  é a posição adimensional da carga móvel em relação ao comprimento do elemento de viga.

## 2.2 Dados experimentais

A medição indireta da massa da carga móvel aplicada a viga pela solução do problema inverso é realizada através da comparação dos dados obtidos da solução do problema direto com dados experimentais da deflexão da viga. Os dados experimentais utilizados nesse trabalho foram obtidos em Billelo et al. (2004) [17].

Em seu trabalho Billelo et al. criaram um modelo em pequena escala de ponte transposta por um veículo. Realizaram experimentos com o modelo e obtiveram dados experimentais da deflexão da viga quando atravessada pela carga móvel. Esses dados foram comparados com resultados obtidos matematicamente através de solução analítica do problema.

Os requisitos de semelhança entre o modelo em escala e a ponte transposta por veículo foram calculados baseados no teorema de Buckingham. O modelo em escala consiste em uma viga de alumínio 6060 biapoiada havendo ainda dois arames de aço colados em sua superfície, servindo de trilho para a carga móvel. Como carga móvel é utilizado um disco de aço. Uma rampa é posicionada junto à extremidade esquerda da viga para acelerar a carga móvel antes de sua entrada na viga.

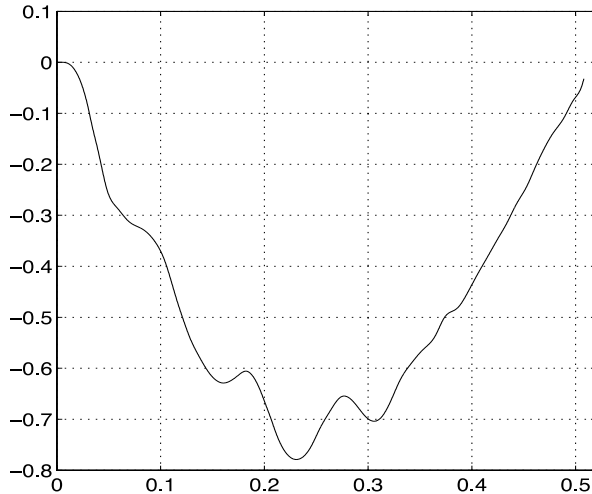
Foram realizadas medições da velocidade do disco de aço quando de sua entrada e saída da viga através de sensores óticos. A deflexão da viga foi medida através de sensor laser posicionado a 7/16 do comprimento da viga a partir de sua extremidade esquerda.

Na tabela 1 são apresentados os dados da ponte e do veículo, do modelo em escala e os fatores de escala utilizados por Billelo et al. Na Fig. 4 é apresentada a curva de deflexão do ponto medido na viga, obtida experimentalmente por Billelo et al (2004).

**Tab 1:** Dados do experimento de Billelo et al. (2004).

Variável	Ponte/veículo	Modelo	Fator de Escala
(m)	60	1,0715	57
(Nm2)	224,4x109	162,6	1,38x109
(kg/m-1)	13.370	1,847	7,45 x103
(kg)	214.625	0,505	4,25 x105
(m/s)	15,915	2,108	7,55
Deflexão,	-	-	57

Fonte: [17].



**Fig. 4** – Deflexão da viga no ponto 7/16L, obtida experimentalmente. Fonte: autor [17].

### 2.3 Técnicas de solução do problema inverso

O problema inverso é resolvido minimizando-se, através de técnicas de otimização, a soma dos erros quadrados entre dados estimados pela solução do problema direto e dados experimentais, chamada função objetivo, Eq. 22 e 23. São utilizadas duas técnicas de otimização nesse estudo, o gradiente conjugado e PSO, com o intuito de selecionar a técnica que melhor se enquadra em uma aplicação real do sistema WIM proposto.

$$S(P) = \sum_{i=1}^I [Y_i - u_i(P)]^2 \quad (22)$$

ou ainda na forma matricial:

$$S(P) = [Y_i - u_i(P)]^T [Y_i - u_i(P)] \quad (23)$$

$P$  é o vetor dos parâmetros a serem determinados,  $Y_i$  o vetor com as medidas experimentais no tempo  $t_p$ , sendo  $I$  o número de medições no tempo  $t_p$  e  $u_i$  o vetor com as medidas estimadas no tempo  $t_p$ , através da solução do problema direto [13].

O método do GC minimiza a Eq. 23 através de um processo iterativo utilizando um passo e direção de busca baseados no gradiente da função objetivo. O método funciona de acordo com o procedimento abaixo [13],

$$P^{k+1} = P^k - \lambda^k d^k \quad (24)$$

$\lambda^k$  é o passo de busca, definido por,

$$\lambda^k = \frac{[J^k d^k]^T [u(P^k) - Y]}{[J^k d^k]^T [J^k d^k]} \quad (25)$$

$J^k$  é a matriz de sensibilidade, definida por,

$$J(P) = \left[ \frac{\partial u^T(P)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial P_1} & \frac{\partial u_1}{\partial P_2} & \frac{\partial u_1}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial P_N} \\ \frac{\partial u_2}{\partial P_1} & \frac{\partial u_2}{\partial P_2} & \frac{\partial u_2}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial u_l}{\partial P_1} & \frac{\partial u_l}{\partial P_2} & \frac{\partial u_l}{\partial P_3} & \dots & \frac{\partial u_l}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$d^k$  a direção de descida, dada por,

$$d^k = \nabla S^k(P^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (27)$$

$\gamma^k$  é chamado de coeficiente de conjugação, definido pela equação de Fletcher-Reeves,

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} \quad (28)$$

$\nabla S(P^k)$  o gradiente da função objetivo, calculado por,

$$\nabla S(P^k) = -2(J^k)^T [Y - W(P^k)] \quad (29)$$

O método PSO é definido como um método de otimização evolucionário ou estocástico. Esses métodos tendem a imitar a natureza a fim de encontrar o mínimo da função objetivo. O PSO foi criado baseado no movimento de pássaros em busca de comida. Ele tenta equilibrar a individualidade e a sociabilidade dos indivíduos a fim de localizar o melhor local para se alimentar [18]. Segue abaixo seu processo iterativo,

$$V_i^{k+1} = \partial V_i^k + B_1 r_{1,i} (P_i^k - X_i^k) + B_2 r_{2,i} (P_g - X_i^k) \quad (30)$$

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1} \quad (31)$$

onde,  $X_i$  é o vetor de parâmetros,  $V_i$  é a velocidade,  $\partial$  é chamado de fator de inércia e deve ser definido entre 0 e 1,  $B_1$  e  $B_2$  os fatores de aprendizagem individual e global respectivamente, que devem ser definidos entre 1 e 2,  $r_{1,i}$  e  $r_{2,i}$  são números randômicos com distribuição uniforme entre 0 e 1,  $P_i$  é o vetor de parâmetros, nessa posição, com a melhor solução entre todas as iterações e  $P_g$  é o vetor de parâmetros com a melhor solução entre todos os outros vetores de parâmetros na iteração [18].

O primeiro termo do lado direito da Eq. 30 representa a inércia da partícula, o segundo a aprendizagem individual e o terceiro a aprendizagem global.

O critério de parada de ambos os métodos de otimização é dado por  $S(P_g^{k+1}) < \varepsilon$  ou se  $S(P_g)^k - S(P_g)^{k+1} < 0,01$  por mais de 5 iterações.

### 3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram realizadas simulações de medição indireta da massa do veículo ao atravessar uma ponte utilizando-se os procedimentos descritos na seção anterior e os dados apresentados na tabela 1 e Fig. 4. Na tabela 2 são apresentados os parâmetros utilizados pelos métodos de otimização.

Na solução do problema direto pelo MEF foi considerado o amortecimento da viga. Para determinação das relações de amortecimento  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , foi utilizado o método do GC, uma vez que Billelo et al. (2004) consideraram amortecimento nulo em suas simulações não sendo fornecida essa informação. Na estimativa das relações de amortecimento foi considerada a igualdade das mesmas, obtendo-se um valor de 4,27%.

Buscando uma solução de compromisso entre tempo computacional e precisão da solução do problema direto pelo MEF, foram realizadas simulações alterando-se o número de elementos em que a viga é discretizada e o passo de integração do método Runge-Kutta. Na tabela 3 são apresentados os resultados obtidos.

Durante a solução do problema inverso, faz-se necessária a solução do problema direto repetidas vezes. Assim, foi escolhida a discretização da viga com 5 elementos e passo de integração de  $10^{-3}$ , pois apresenta o menor tempo computacional entre as soluções com a melhor precisão. Dessa forma, buscou-se obter tempos de solução do problema inverso viáveis para uma aplicação real em um sistema WIM.

**Tab 2:** Parâmetros métodos de otimização.

Parâmetro		GC	PSO
Valor inicial/ espaço de busca	M(Kg)	50.000	50.000 – 300.000
$\varepsilon$		0,01	0,01
$\theta$		-	0,5
$B_1$		-	1
$B_2$		-	1,2
População		-	20

Fonte: autor.

**Tab 3:** Análise de soluções pelo MEF.

Nº elementos	Passo de integração							
	$10^{-3}$		$10^{-4}$		$10^{-5}$		$10^{-6}$	
	t (s)	Deflexão max (mm)	t (s)	Deflexão max (mm)	t (s)	Deflexão max (mm)	t (s)	Deflexão max (mm)
2	2,1	0,7580		0,7580		0,7580	2924,3	0,7580
5	2,4	0,7595		0,7595		0,7595	3064,4	0,7595
10	*	*	*	*		0,7595	3852,6	0,7595
20	*	*	*	*	*	*	4963,1	0,7596

Fonte: autor.

Nota: \* não foram obtidas soluções.

Nota 2: a deflexão máxima obtida serve como fator para avaliação da precisão da solução, o valor de referência obtido experimentalmente foi de 0,787 mm.

Conforme apresentado na tabela 4, foi possível estimar a massa da carga móvel nas simulações realizadas em ambos os métodos de otimização, obtendo-se bons resultados. Com relação ao valor da massa estimada, os dois métodos apresentaram resultados praticamente equivalentes, com um erro relativo de pouco mais de 0,7%. O valor obtido da função objetivo foi também praticamente o mesmo para os dois métodos.

A grande diferença se mostrou quanto ao tempo necessário para estimação da massa do veículo ao cruzar a ponte, onde o PSO apresentou um tempo praticamente nove vezes

maior que o GC, que requereu um tempo de aproximadamente um minuto. Quanto ao número de iterações, o GC também apresentou um valor menor que o PSO.

Na Fig. 5, são comparadas as curvas de deflexão do ponto medido na viga, obtidas nas simulações realizadas com a curva obtida experimentalmente. Percebe-se que as curvas obtidas nas simulações apresentam uma boa aproximação da curva experimental.

**Tab 4:** Resultados das simulações.

Método	(214.625 Kg)	Erro relativo %	Função objetivo (S)	Tempo (s)	k
GC	213.099,47	-0,71	0,8372	62	7
PSO	213.067,54	-0,72	0,8409	556	11

Fonte: autor.

### 4. CONCLUSÃO

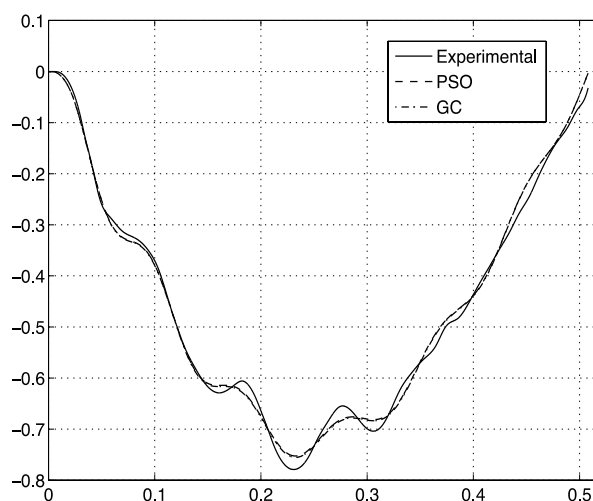
Neste trabalho técnicas de solução de problema inverso, GC e PSO, aliadas a teoria de cargas móveis aplicadas a vigas, foram utilizadas na formulação de um sistema WIM.

Uma discretização do sistema viga sujeita à carga móvel, pelo MEF, foi utilizada como solução do problema direto. Tal solução do problema foi comparada com dados experimentais de modelo em escala, obtidos na literatura, constituindo o problema inverso.

As soluções do problema inverso pelos dois métodos de otimização foram comparadas. Quanto ao valor da massa estimada os dois métodos praticamente se equivalem, apresentado um erro relativo de pouco mais de 0,7%. Já quanto ao tempo computacional, o método do GC apresentou um tempo aproximadamente nove vezes menor que o PSO.

É importante ressaltar que em uma aplicação real do sistema WIM, o método do GC mostra-se muito mais vantajoso, uma vez que em balanças rodoviárias necessita-se rapidez na pesagem dos veículos inspecionados.

Testes em escala real são necessários, porém os resultados obtidos demonstram a viabilidade do sistema WIM proposto.



**Fig. 5** – Deflexão da viga no ponto 7/16L. Fonte: autor.

### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Instituto Militar de Engenharia (IME) pelo apoio prestado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Convênio TT102/2007 DNIT/UFSC, Identificação de Sistemas de Pesagem em Movimento, Departamento Nacional de Infra-estrutura de Transportes, 2007, <http://www.dnit.gov.br/download/rodovias/operacoes-rodoviaras/convenios-com-a-ufsc/tt-102-2007-produto-complementar-12.pdf>, acessada em: setembro 2017.
- [2] A. O. Cifuentes, and D.N. Herting, Transient response of a beam to a moving mass using a finite element approach, Proc. Fourth Int. Congress of Innovative Numerical Methods in Engineering, 1986, p. 533-538, Atlanta, GA.
- [3] A. O. Cifuentes, Dynamic response of a beam excited by a moving mass, Finite Elements in Analysis and Design, 5, 1989, p. 237–246.
- [4] Y. H. Lin, M. W. Trethewey, Finite element analysis of elastic beams subjected to moving dynamic loads, Journal of Sound and Vibration, 136, 1990, p. 323-342.
- [5] J. R. Rieker, Y.H. Lin, M.W. Trethewey, Discretization considerations in moving load finite element beam models, Finite Elements in Analysis and Design, 21, 1996, p. 129-144.
- [6] J. J. Wu, A.R. Whittaker, M.P. Cartmell, Dynamic responses of structures to moving bodies using combined finite element and analytical methods, International Journal of Mechanical Sciences, 43, 2001, p. 2555–2579.
- [7] J. J. Wu, Transverse and longitudinal vibrations of a frame structure due to a moving trolley and the hoisted object using moving finite element. International Journal of Mechanical Sciences, 50, 2008, p. 613–625.
- [8] V. Kahya, Dynamic analysis of laminated composite beams under moving loads using finite element method, Nuclear Engineering and Design, 243, 2012, p. 41–48.
- [9] I. Esen, Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation, Mathematical and Computational Applications, 16, 2011, p. 171-182.
- [10] I. Esen, M. A. Koç, Optimization of a passive vibration absorber for a barrel using the genetic algorithm, Expert Systems with Applications, 42, 2015, p. 894–905.
- [11] I. Esen, A new finite element for transverse vibration of rectangular thin plates under a moving mass, Finite Elements in Analysis and Design, 66, 2013, p. 26–35
- [12] M. A. Koç, I. Esen, Y. Çay, Tip deflection determination of a barrel for the effect of an accelerating projectile before firing using finite element and artificial neural network combined algorithm, Latin American Journal of Solids and Structures, 13, 2016, p. 1968-1995.
- [13] M. N. Ozisik, H. R. Orlande, Inverse Heat Transfer, Taylor & Francis, 2000.
- [14] A. B. Caldeira, M. S. Carvalho, R. T. Costa Neto, Estimation of tracked vehicle suspension parameters, Acta Scientiarum, 39, 1, 2017, p. 51-57.
- [15] R. W. Clough, J. Penzien, Dynamics of structures, 3th ed., Computers & Structures Inc., Berkeley, 2003.
- [16] L. Fryba, Vibration of Solids and Structures under Moving Loads, 3th ed., Thomas Telford, London, 1999.
- [17] C. Bilello, A. L. Bergman, D. Kuchma, Experimental investigation of a small-scale bridge model under a moving mass, Journal of Structure Engineering, ASCE, 130, 5, 2004, p. 799-804.
- [18] M. J. Colaço, H. R. Orlande, G. S. Dulikravich, Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer, Journal of the Brazilian Society and Mechanical Sciences Engineering, ABCM, 28, 1, 2006, p. 1-24.