

Problema rotodinâmico de autovalor (parte 2): sistema giroscópico amortecido

Victor Prodonoff* e Adhemar Castilho**

Resumo

Apresenta-se um novo método para o desacoplamento das equações de movimento de um sistema rotodinâmico amortecido. São utilizadas as matrizes de massa, rigidez, amortecimento e giroscópica, no seu estado original de espaço padrão ($n \times n$), não sendo necessária a duplicação das matrizes para o espaço estado ($2n \times 2n$). São usados no desacoplamento os autovetores complexos conjugados e biortogonais da matriz soma das matrizes giroscópica e de amortecimento. As matrizes de massa e rigidez são simétricas e as matrizes giroscópica e de amortecimento são não simétricas.

Palavras-chave

Autovalor, autovetor, efeito giroscópico, amortecimento modal, desacoplamento, sistemas amortecidos, sistemas giroscópicos amortecidos.

Introdução

Em artigo anterior^[1] dos autores, foi mostrado que as matrizes modais, $[U]$ da matriz giroscópica \mathbf{G} e $[V]$ de sua transposta $\mathbf{G}^T = -\mathbf{G}$, formam um conjunto biortogonal $[V]^T [U] = [I]$ que, usadas em conjunto, desacoplam um sistema não amortecido com equações giroscópicas. Neste artigo nos propomos a mostrar que os autovetores biortogonais $[U]$ e $[V]$ da matriz modal da soma de $[C] + [G] = [D]$, sendo $[C]$ a matriz de amortecimento, desacoplam as equações do sistema giroscópico amortecido. A proposta é válida

quando as matrizes de massa \mathbf{M} e de rigidez \mathbf{K} são simétricas, como no caso largamente empregado dos elementos finitos.

Nos casos em que o amortecimento é relativamente baixo, como em mancais de rolamento, a solução do problema de autovalor pode ser simplificada, com a ajuda do conceito de amortecimento proporcional.^[3] Nesses casos a matriz de amortecimento \mathbf{C} é substituída por uma combinação linear entre \mathbf{M} e \mathbf{K} , fornecendo a equação matricial

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{q}}\} + ([\alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}])\{\dot{\mathbf{q}}\} + \Omega[\mathbf{G}]\{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{Q}(t)\} \quad (1)$$

* Ph. D., Cefet/RJ – Centro Federal de Educação Tecnológica do Rio de Janeiro.

** D.Sc., Petróleo Brasileiro SA, Petrobras.

sendo q = vetor de deslocamento, Q = vetor de forças, α e β são escalares convenientemente escolhidos de modo a satisfazer o amortecimento em frequências previamente escolhidas.^[3] O mesmo método usado no artigo anterior^[1] pode ser aqui usado, isto é, utilizam-se as matrizes biortogonais de G para desacoplar o sistema.

No caso geral de amortecimento em mancais de deslizamento, ou amortecimento localizado, não podemos mais considerar a matriz C como simétrica, e, assim, o método indicado acima não produzirá o desacoplamento desejado das equações.

Desacoplamento das Equações de Movimento – Sistema Giroscópico Amortecido

a) Diagonalização das matrizes do sistema

Nesta seção prova-se que os autovetores adjuntos da matriz $[D] = [C] + [G]$ desacoplam as equações de um sistema rotodinâmico amortecido. As matrizes modais adjuntas $[U]$ de $[D]$, e $[V]$ de $[D]^T$, além de diagonalizarem $[D]$, também diagonalizam M e K .

A prova dessa propriedade é feita para um modelo de n graus de liberdade, usando-se apenas matrizes ($n \times n$), não sendo necessário converter o sistema para o espaço estado ($2n \times 2n$). Considere o sistema dinâmico representado pela seguinte equação homogênea:

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C + G])\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\},$$

$$[D] = [C + G] \quad (2)$$

A solução harmônica $\{q\} = \{u\}e^{i\omega t}$, sendo $\{u\}$ o vetor de deslocamentos modais de $[D]$, para a frequência ω , quando substituída em (2), fornece o sistema algébrico abaixo:

$$-\omega^2[M]\{u\} + i\omega[D]\{u\} + [K]\{u\} = \{0\} \quad (3)$$

Como a matriz $[D]$ não é simétrica, considere o sistema adjunto formado pela matriz transposta de $[D]$.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [D]^T\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\}, \quad (4)$$

A solução harmônica $\{q\} = \{v\}e^{i\omega t}$, sendo $\{v\}$ o vetor de deslocamentos modais de $[D]^T$, para a frequência ω , fornece

$$-\omega^2[M]\{v\} + i\omega[D]^T\{v\} + [K]\{v\} = \{0\} \quad (5)$$

Considerando duas soluções distintas: i, j sendo $i \neq j$, as equações (3) e (5) fornecem:

$$-\omega_i^2[M]\{u_i\} + i\omega_i[D]\{u_i\} + [K]\{u_i\} = \{0\} \quad (6a)$$

$$-\omega_j^2[M]\{v_j\} + i\omega_j[D]^T\{v_j\} + [K]\{v_j\} = \{0\} \quad (6b)$$

Pré-multiplicando (6a) por $\{v_j\}^T$ e (6b) por $\{u_i\}^T$, obtém-se:

$$-\omega_i^2\{v_j\}^T[M]\{u_i\} + i\omega_i\{v_j\}^T[D]\{u_i\} + \{v_j\}^T[K]\{u_i\} = 0 \quad (7a)$$

$$-\omega_j^2\{u_i\}^T[M]\{v_j\} + i\omega_j\{u_i\}^T[D]^T\{v_j\} + \{u_i\}^T[K]\{v_j\} = 0 \quad (7b)$$

Cada parcela das equações (7a) e (7b) são termos escalares, portanto iguais a seu transposto. Assim sendo, transpondo a equação (7b) e dela subtraindo (7a), encontramos a relação:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\{v_j\}^T[M]\{u_i\} - i(\omega_i - \omega_j)\{v_j\}^T[D]\{u_i\} + 0 = 0 \quad (8)$$

uma vez que $[M] = [M]^T$ e $[K] = [K]^T$,

e considerando que $\{u_i\}^T[M]\{v_j\} = \{v_j\}^T[M]^T\{u_i\}$;

$$\{u_i\}^T[K]\{v_j\} = \{v_j\}^T[K]^T\{u_i\}. \text{ Como } \{v_j\} \text{ e } \{u_i\} \text{ são autovetores adjuntos de } [D], \text{ portanto}$$

$$\{v_j\}^T[D]\{u_i\} = 0, \quad (9)$$

logo:

$$\{v_j\}^T [M] \{u_i\} = 0 \quad (10)$$

Retornando à equação (7a) mostrada anteriormente, vemos que para todos os casos nos quais $i \neq j$, $\{v_j\}^T [M] \{u_i\} = 0$ e $\{v_j\}^T [D] \{u_i\} = 0$ serão nulos, bem como

$$\{v_j\}^T [K] \{u_i\} = 0 \quad (11)$$

Mostramos que os autovetores $\{u_i\}$ da matriz $[D]$ e os autovetores $\{v_j\}$ de $[D]^T$ desacoplam as equações do sistema giroscópico amortecido. Dessa forma fica provado que os autovetores adjuntos $\{u\}$ de $[D]$ e $\{v\}$ de $[D]^T$, além de diagonalizarem D , também diagonalizam M e K e desacoplam as equações de movimento.

b) Equações modais

Partindo da equação matricial

$$[M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{Q\} \quad (12)$$

onde $[M] = [M]^T$, $[K] = [K]^T$, $[D] = [C + G]$

e $[D] \neq [D]^T$ e fazendo a transformação linear

$$q = [U] \{\eta\} \quad (13)$$

sendo $[U]$ a matriz dos autovetores de $[D]$ e $\{\eta\}$ o vetor de variáveis modais, obtém-se o sistema alternativo

$$[M] [U] \{\ddot{\eta}\} + [D] [U] \{\dot{\eta}\} + [K] [U] \{\eta\} = \{Q\} \quad (14)$$

Pré-multiplicando (14) por $[V]^T$, onde $[V]$ é a matriz dos autovetores de $[D]^T$, obtém-se o sistema desacoplado mostrado a seguir

$$[V]^T [M] [U] \{\ddot{\eta}\} + [V]^T [D] [U] \{\dot{\eta}\} + [V]^T [K] [U] \{\eta\} = [V]^T \{Q\} \quad (15)$$

sendo:

$$[V]^T [D] [U] = [\lambda] \quad \text{Matriz com autovalores de } [D] \quad (16a)$$

$$[V]^T [M] [U] = [I] \quad \text{Matriz de massa normalizada} \quad (16b)$$

$$[V]^T [K] [U] = [k] \quad \text{Matriz de rigidez diagonalizada} \quad (16c)$$

Substituindo os valores acima na equação, teremos:

$$[I] \{\ddot{\eta}\} + [\lambda] \{\dot{\eta}\} + [k] \{\eta\} = [V]^T \{Q\} \quad (17)$$

Este sistema é formado de equações desacopladas do tipo

$$\ddot{\eta}_i + \lambda_i \dot{\eta}_i + \kappa_i \eta_i = f_i ; \quad (17a)$$

$$f_i = \{v_j\}_i^T \{Q\} \Rightarrow i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Dessa forma fica alcançado o objetivo de desacoplar as equações simultâneas de movimento. Isto é conseguido em virtude de os autovetores adjuntos de $[D]$ são os mesmos de M , D e K , conforme demonstrado em (1).

Exemplo literal

A investigação da solução de um problema giroscópico amortecido, em sua forma padrão, será feita por intermédio da observação no plano XY, do movimento de uma massa m com reação elástica k e submetida a um amortecimento viscoso c , que incorporem as propriedades giroscópicas e de amortecimento ao modelo físico mostrado a seguir, de forma independente.

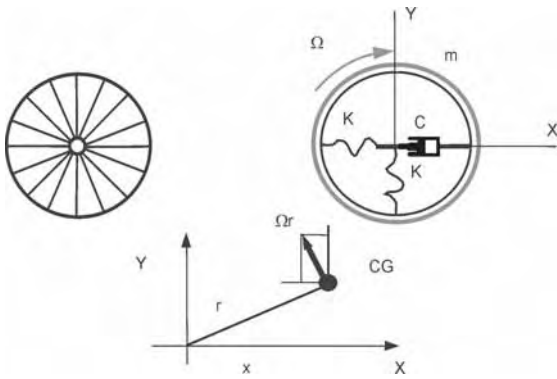


Figura 1 – Exercício giroscópico amortecido.

As matrizes representativas desse sistema são:^[4]

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K-m\Omega^2 & 0 \\ 0 & K-m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

Trocando $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ por $\{q\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ (19)

e sendo $[C] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [C]^T$; (20)

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [M] \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + [D] \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{Bmatrix} + [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow [M] \{\ddot{q}\} + [D] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (21)$$

A matriz giroscópica amortecida

$$[D] = [C] + [G] = \begin{bmatrix} c & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \neq [D]^T \quad (22)$$

é não simétrica, e, por causa disto, um novo método de desacoplamento é apresentado.

a) Autovalores e autovetores da matriz giroscópica amortecida D

Considere o problema de autovalor da matriz [D]:

$$\begin{aligned} [[D] - \lambda I] \{u\} = \{0\} &\Rightarrow \begin{bmatrix} c & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} c-\lambda & -2m\Omega-0 \\ 2m\Omega-0 & 0-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (23)$$

que fornece

$$\text{Det.} \begin{bmatrix} c-\lambda & -2m\Omega \\ 2m\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad (24)$$

A equação característica
 $\Rightarrow \lambda^2 - c\lambda + 4m^2\Omega^2 = 0$ tem as raízes (25)

$$\lambda_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - 4m^2\Omega^2} \quad (26)$$

$$C_{\text{CRIT.}} = 4m\Omega; \quad r_r = \frac{\Omega}{\omega_{rr}} \quad (27)$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{2} + iq; \quad \lambda_2 = \frac{c}{2} - iq, \quad \text{onde } q = \sqrt{4m^2\Omega^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}, \quad (28)$$

$$\xi = \xi_{rr} = \frac{c}{4M_{rr}\omega_{rr}} = \frac{c}{C_{\text{CRIT}}} \Rightarrow \text{fator de amortecimento modal} \quad (29)$$

Portanto os autovalores de **D** são complexos conjugados. Expandindo (23), obtemos um sistema homogêneo de equações algébricas nas incógnitas dos autovetores u_1 e u_2

$$\begin{cases} (c-\lambda).u_1 - 2m\Omega u_2 = 0 \\ 2m\Omega u_1 - \lambda u_2 = 0 \end{cases} \quad (30a,b)$$

Substituindo inicialmente o autovalor

$\lambda_1 = \frac{c}{2} + iq$ em (30a) e arbitrando $u_2 = 1$ encontramos o autovetor:

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{mc\Omega}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} + i \frac{2m\Omega q}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a + ib \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Substituindo igualmente o autovalor

$\lambda_2 = \frac{c}{2} - iq$ em (30a) e arbitrando $u_2 = 1$, encontramos o autovetor:

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{mc\Omega}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} - i \frac{2m\Omega q}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a - ib \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Podemos mostrar que esses autovetores $\{u\}_1$ e $\{u\}_2$ não são ortogonais:

$$[U] = \begin{bmatrix} a+ib & a-ib \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow [U]^T [U] = \begin{bmatrix} (a^2 - b^2 + 1) + 2ia.b & a^2 + b^2 + 1 \\ a^2 + b^2 + 1 & (a^2 - b^2 + 1) - 2ia.b \end{bmatrix} \quad (33)$$

A não ortogonalidade dos autovetores da matriz D é plenamente esperada, na medida em que essa matriz é não simétrica.

É importante destacar que a operação $[U]^T [D][U]$ não diagonaliza a matriz D .

b) *Determinação dos autovetores adjuntos de D*

$$\text{Det. } [D]^T = \text{Det. } \begin{bmatrix} c-\lambda & 2m\Omega \\ -2m\Omega & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (c-\lambda)v_1 + 2m\Omega v_2 = 0 \\ 2m\Omega v_1 + \lambda v_2 = 0 \end{cases} \quad (34a,b)$$

Equação característica $\Rightarrow \lambda^2 - c\lambda + 4m^2\Omega^2 = 0$, a mesma da matriz D .

Substituindo $\lambda_1 = \frac{c}{2} + iq$ e $\lambda_2 = \frac{c}{2} - iq$ em

(34a) e arbitrando $v_2 = 1$ nos dois casos, encontramos os autovetores $\{v\}_1$ e $\{v\}_2$

$$\{v\}_1 = \begin{Bmatrix} \frac{-m.c.\Omega}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} - i \frac{2m\Omega q}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a - ib \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

$$\{v\}_2 = \begin{Bmatrix} \frac{-m.c.\Omega}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} + i \frac{2m\Omega q}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a + ib \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Da mesma forma que no caso anterior, $\{v\}_1$ e $\{v\}_2$ são complexos conjugados e não são ortogonais entre si. Mas vamos mostrar que existe a biortogonalidade, ou seja, $[V]^T [U]$ é uma matriz diagonal. Usaremos, a partir desse ponto, quantidades adimensionais, como abaixo.

$$C_{\text{CRIT.}} = 4m\Omega; \text{ Assim sendo} \quad (37)$$

$$\frac{m.c.\Omega}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} = \frac{m.c.\Omega}{4m^2\Omega^2} = \frac{c}{C_{\text{CRIT.}}} = \xi \quad (38)$$

$$\frac{2m\Omega q}{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + q^2} = \frac{2m\Omega q}{4m^2\Omega^2} = \sqrt{1 - \xi^2} \quad (39)$$

A substituição de (38) e (39) em (31), (32), (35) e (36) fornece a forma adimensional das matrizes dos autovetores $[U]$ e $[V]$.

$$[U] = \begin{bmatrix} \xi + i\sqrt{1-\xi^2} & \xi - i\sqrt{1-\xi^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad [V] = \begin{bmatrix} -\xi - i\sqrt{1-\xi^2} & -\xi + i\sqrt{1-\xi^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Podemos então verificar a biortogonalidade existente entre $[U]$ e $[V]$.

$$[V]^T[U] = [U]^T[V] = 2 \begin{bmatrix} (1-\xi^2) - i\xi\sqrt{1-\xi^2} & 0 \\ 0 & (1-\xi^2) + i\xi\sqrt{1-\xi^2} \end{bmatrix} \quad (40a)$$

onde $[U]$ é a matriz dos autovetores de $[D]$ e $\{\eta\}$ o vetor de coordenadas modais, obtemos:

$$[M][U]\{\ddot{\eta}\} + [D][U]\{\dot{\eta}\} + [K][U]\{\eta\} = \{0\} \quad (42)$$

c) *Desacoplamento das equações diferenciais*

Pré-multiplicando por $[V]^T$

Voltando à equação (21), fazendo a transformação linear $\{q\} = [U]\{\eta\}$, $\{\dot{q}\} = [U]\{\dot{\eta}\}$ e $\{\ddot{q}\} = [U]\{\ddot{\eta}\}$

$$[V]^T[M][U]\{\ddot{\eta}\} + [V]^T[D][U]\{\dot{\eta}\} + [V]^T[K][U]\{\eta\} = \{0\} \quad (43)$$

Calculando cada um dos produtos das matrizes M , D e K , teremos:

$$\begin{aligned} [V]^T[M][U] &= \begin{bmatrix} -\xi - i\sqrt{1-\xi^2} & 1 \\ -\xi + i\sqrt{1-\xi^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi + i\sqrt{1-\xi^2} & \xi - i\sqrt{1-\xi^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [V]^T[M][U] = 2m \cdot \begin{bmatrix} (1-\xi^2) - i\xi\sqrt{1-\xi^2} & 0 \\ 0 & (1-\xi^2) + i\xi\sqrt{1-\xi^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

Procedendo de forma semelhante

$$\begin{aligned} [V]^T[D][U] &= \begin{bmatrix} -\xi - i\sqrt{1-\xi^2} & 1 \\ -\xi + i\sqrt{1-\xi^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi + i\sqrt{1-\xi^2} & \xi - i\sqrt{1-\xi^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [V]^T[D][U] = 2m \cdot \begin{bmatrix} (2\xi\Omega + 2i\Omega\sqrt{1-\xi^2}) \cdot [(1-\xi^2) - i\xi\sqrt{1-\xi^2}] & 0 \\ 0 & (2\xi\Omega - 2i\Omega\sqrt{1-\xi^2}) \cdot [(1-\xi^2) + i\xi\sqrt{1-\xi^2}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

Da mesma forma

$$\begin{aligned} [V]^T[K][U] &= \begin{bmatrix} -\xi - i\sqrt{1-\xi^2} & 1 \\ -\xi + i\sqrt{1-\xi^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k - m\Omega^2 & 0 \\ 0 & k - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi + i\sqrt{1-\xi^2} & \xi - i\sqrt{1-\xi^2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [V]^T[K][U] = 2m \cdot \begin{bmatrix} (\omega^2 - \Omega^2) \cdot [(1-\xi^2) - i\xi\sqrt{1-\xi^2}] & 0 \\ 0 & (\omega^2 - \Omega^2) \cdot [(1-\xi^2) + i\xi\sqrt{1-\xi^2}] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

onde foi usado a frequência $\omega^2 = k/m$. (47)

A substituição de (44), (45) e (46) na equação (43) fornece duas equações independentes em η_1 e η_2 . As expressões $(1-\xi^2) \pm i\xi\sqrt{1-\xi^2}$ são nulas somente quando $\xi=1$ ou seja $c = C_{\text{CRIT}}$, no caso de amortecimento crítico. Como estamos estudando o caso em que $c < C_{\text{CRIT}}$, podemos dividir as equações de η_1 e η_2 pela expressão entre colchetes, resultando finalmente as equações

$$\ddot{\eta}_1 + 2\Omega(\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\dot{\eta}_1 + (\omega^2 - \Omega^2)\eta_1 = 0 \quad (48a)$$

$$\ddot{\eta}_2 + 2\Omega(\xi - i\sqrt{1-\xi^2})\dot{\eta}_2 + (\omega^2 - \Omega^2)\eta_2 = 0 \quad (48b)$$

d) Solução das equações diferenciais

A solução da equação homogênea é do tipo $\eta_1 = e^{rt}$; $\dot{\eta}_1 = re^{rt}$; $\ddot{\eta}_1 = r^2e^{rt}$. (49)

Substituindo esses valores na equação (48a), teremos as raízes

$$r_{1,2} = -(\xi\Omega + i\Omega\sqrt{1-\xi^2}) \pm \sqrt{(\xi\Omega + i\Omega\sqrt{1-\xi^2})^2 - (\omega^2 - \Omega^2)} \quad (50)$$

A solução da equação homogênea (48b) é do tipo $\eta_2 = e^{st}$; $\dot{\eta}_2 = se^{st}$; $\ddot{\eta}_2 = s^2e^{st}$ (51)

Substituindo esses valores, teremos as duas outras raízes

$$s_{1,2} = -(\xi\Omega - i\Omega\sqrt{1-\xi^2}) \pm \sqrt{(\xi\Omega - i\Omega\sqrt{1-\xi^2})^2 - (\omega^2 - \Omega^2)} \quad (52)$$

Para que possamos continuar com uma solução analítica e ter um melhor sentimento físico do resultado, vamos fazer uma simplificação nos

radicandos das raízes (50) e (52). Isto em nada diminuirá a generalidade da solução, uma vez que numericamente as raízes podem ser calculadas exatamente. Considerando-se $\xi \ll 1$, ou seja, um pequeno amortecimento, esta simplificação faz com que

$$\sqrt{(\xi\Omega \pm i\Omega\sqrt{1-\xi^2})^2 - (\omega^2 - \Omega^2)} = \pm i\omega \quad (53)$$

As raízes ficarão com a forma mostrada abaixo:

$$r_1 = -\xi\Omega + i(-\Omega\sqrt{1-\xi^2} + \omega) \quad \text{precessão retrógrada} \quad (54)$$

$$r_2 = -\xi\Omega - i(\Omega\sqrt{1-\xi^2} + \omega) \quad \text{precessão síncrona} \quad (55)$$

$$s_1 = -\xi\Omega - i(-\Omega\sqrt{1-\xi^2} + \omega) \quad \text{precessão retrógrada} \quad (56)$$

$$s_2 = -\xi\Omega + i(\Omega\sqrt{1-\xi^2} + \omega) \quad \text{precessão síncrona} \quad (57)$$

Com as raízes acima, as variáveis modais assumem a forma

$$\eta_1 = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t} \Rightarrow C_1e^{-\xi\Omega t} \cdot e^{i(-\Omega_c + \omega)t} + C_2e^{-\xi\Omega t} \cdot e^{-i(\Omega_c + \omega)t} \quad (58)$$

$$\eta_2 = D_1e^{s_1t} + D_2e^{s_2t} \Rightarrow D_1e^{-\xi\Omega t} \cdot e^{-i(-\Omega_c + \omega)t} + D_2e^{-\xi\Omega t} \cdot e^{i(\Omega_c + \omega)t} \quad (59)$$

$$\text{onde, } \Omega_c = \Omega\sqrt{1-\xi^2} \quad (60)$$

Voltando ao vetor original $q = [U]\eta$, equação (41), e substituindo q da equação (19), U da equação (40):

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\xi + i\sqrt{1-\xi^2})\eta_1 + (\xi - i\sqrt{1-\xi^2})\eta_2 \\ \eta_1 + \eta_2 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

A solução final nas variáveis $x_c(t)$ e $y_c(t)$ apresenta movimentos harmônicos com freqüências de precessão síncrona e retrógrada.

$$x_c(t) = e^{-\xi \cdot \Omega_c \cdot t} \cdot [E_1 \cos(\Omega_c + \omega)t + F_1 \sin(\Omega_c + \omega)t + G_1 \cos(-\Omega_c + \omega)t + H_1 \sin(-\Omega_c + \omega)t] \quad (62)$$

$$y_c(t) = e^{-\xi \cdot \Omega_c \cdot t} \cdot [E_2 \cos(\Omega_c + \omega)t + F_2 \sin(\Omega_c + \omega)t + G_2 \cos(-\Omega_c + \omega)t + H_2 \sin(-\Omega_c + \omega)t] \quad (63)$$

As expressões $\xi \pm i\sqrt{1-\xi^2}$, por serem constantes, foram incorporadas às constantes de integração. Existem apenas quatro constantes indeterminadas de integração, uma vez que elas relacionam-se entre si na forma abaixo:

$$E_1 = \xi \cdot E_2 - \sqrt{1-\xi^2} F_2 \quad (64)$$

$$F_1 = \xi \cdot F_2 + \sqrt{1-\xi^2} E_2 \quad (65)$$

$$G_1 = \xi \cdot G_2 + \sqrt{1-\xi^2} H_2 \quad (66)$$

$$H_1 = \xi \cdot H_2 - \sqrt{1-\xi^2} G_2 \quad (67)$$

As equações (62) e (63) mostram que o movimento nas direções x e y são vibrações harmônicas amortecidas; o fator $e^{-\xi \cdot \Omega_c \cdot t}$ fará com que as amplitudes de vibração decresçam exponencialmente com o tempo. As freqüências naturais são alteradas em relação ao movimento não amortecido. Essa freqüência é reduzida no caso da precessão síncrona e aumentada no caso da precessão retrógrada.

O objetivo principal desse exemplo literal foi mostrar o desacoplamento das equações nas variáveis modais conforme equações (48). Nesse caso particular, não há a possibilidade delas ficarem acopladas pelas matrizes de massa ou rigidez, duas a duas, uma vez que os autovalores da matriz D não serem complexos conjugados puros, ou seja: $\omega_j = -a + ib$, $\omega_{j+1} = -a - ib$, para j ímpar e, portanto, $\omega_j + \omega_{j+1} = -2a \neq 0$.

Mesmo no casos em que não há amortecimento, os pares de equações modais, correspondentes aos autovalores conjugados puros

$\omega_{i,i+1} = \pm i \cdot \omega$, são desacoplados também, quando as matrizes de massa e rigidez possuem submatrizes diagonais (2×2), ao longo das três diagonais centrais, como na discretização em Elementos Finitos, pois $m_{i,i} = m_{i+1,i+1}$ e $m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = 0$, onde $i = 1,3,5,\dots$, o mesmo acontecendo para a matriz de rigidez. Veja detalhes em [1] e [2].

Conclusões

Um novo método está sendo proposto para desacoplamento de um sistema simultâneo de equações diferenciais de movimento rotodinâmico amortecido.


O desacoplamento é realizado no espaço padrão, com matrizes ($n \times n$) somente, evitando, dessa maneira, o grande esforço computacional para o cálculo dos autovalores quando o sistema é transformado para o espaço estado ($2n \times 2n$). São utilizadas as matrizes de massa M e de rigidez K , ambas simétricas, e a matriz giroscópica amortecida D não simétrica, sendo esta última a soma da matriz de amortecimento C e da matriz giroscópica G . Devido ao fato da matriz D não ser simétrica, é necessária a solução de dois problemas conjugados, o primeiro envolvendo M , D , K e o segundo, a matriz transposta de D , ou seja, M , D^T , K .

A existência de dois problemas conjugados não apresenta esforço computacional adicional, uma vez que os autovalores dos dois sistemas

são os mesmos. Os autovalores da matriz isolada D são diferentes dos autovalores fornecidos pelo sistema, porém seus autovetores são os mesmos. O desacoplamento das equações diferenciais é obtido da seguinte forma:

- a) Diagonaliza-se a matriz D através dos autovetores de D e de sua transposta D^T , que formam um sistema biortogonal;
- b) Sendo esses autovetores os mesmos do sistema D , M e K , como consequência,

eles também diagonalizam as matrizes M e K . Dessa forma são obtidas as n equações diferenciais independentes nas variáveis modais.

Um exemplo em forma literal mostra todas as fases do desacoplamento, dando ainda as soluções nas variáveis originais, onde se pode perceber a possibilidade das duas precessões, a síncrona e a retrógrada. 

Referências

- [1] CASTILHO, A., PRODONOFF, V., LOPES, T. A. P. Problema Rotodinâmico de Autovalor (Parte 1): Sistema Giroscópico Não Amortecido.
- [2] CASTILHO, A., 2007, "Uma Visão Global da Rotodinâmica de Turbomáquinas: Ênfase no Método de Elementos Finitos e na Propriedade dos Autovetores Giroscópicos de Desacoplaram as Equações de Movimento", Tese de D. Sc., Programa de Engenharia Oceânica, COPPE/UF RJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [3] ZEPKA, S., 1981, Resposta Dinâmica de Torres Estaiadas, Tese de Mestrado, Programa de Engenharia Mecânica, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- [4] MEIROVITCH, L., 2000, Principles in Technique of Vibrations, Prentice-Hall International (UK) Limited, London.
- [5] MEIROVITCH, L., A Modal Analysis for the Response of Linear Gyroscopic Systems, Journal of Applied Mechanics, vol 42, n 2, 1975, pp 446-450.
- [6] ZHENG, Z., REN, G., WILLIAMS, F. W., The Eigenvalue Problem for Damped Gyroscopic Systems, Int. J. Mech. Sci., vol 39, n 6, 1997, pp 741-750.
- [7] SAWICKI, J. T., GENTA, G., Modal Uncoupling of Damped Gyroscopic Systems, Journal of Sound and Vibration vol 244, n 3, 2001, pp 431-451.

Lista de símbolos

C , $[C]$	Matriz de amortecimento	q	Vetor de coordenadas generalizadas
G , $[G]$	Matriz giroscópica	$Q(t)$	Vetor força externa
$[G]^T$	Matriz giroscópica transposta	t	Tempo
$g_{i,j}$	Coefficiente da matriz giroscópica	U, u	Autovetor de $[D]$
$c_{i,j}$	Coefficiente da matriz de amortecimento	V, v	Autovetor de $[D]^T$
D , $[D]$	Soma das matrizes giroscópica e de amortecimento	XYZ	Referencial Inercial, Fixo ou Global
$d_{i,j}$	Soma de $c_{i,j} + g_{i,j}$	xyz	Referencial Móvel solidário à roda
$[I]$	Matriz uUnitária	η	Vetor de coordenadas modais
$i ; j = \sqrt{-1}$	Unidade no campo complexo	ξ	Razão de amortecimento
K , $[K]$	Matriz de rigidez	ω_1	Frequência Natural
$k_{i,j}$	Coefficiente da matriz de rigidez	$[\lambda]$	Matriz de Autovalores
M , $[M]$	Matriz de Massa	$\lambda_1 = -\omega_1^2$	Autovalor
$m_{i,j}$	Coefficiente da matriz de massa	Ω	Frequência de Rotação da roda