

Estimativa do parâmetro de forçamento no oscilador Duffing utilizando métodos estocásticos

Felipe R Lopes, Jorge A M de Gois

Instituto Militar de Engenharia, Seção de Engenharia Mecânica e de Materiais –
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

RESUMO: Este trabalho apresenta um estudo de problemas inversos aplicados no oscilador Duffing. Desta forma é estimado um forçamento no oscilador e utiliza-se do expoente de Lyapunov para avaliar a sensibilidade às condições iniciais. Para a otimização do parâmetro foram implementados os métodos estocásticos de enxame de partículas (Particle Swarm Optimization) e de Random Restricted Window (R2W). Foi utilizado o software Matlab para criar rotinas em cada método obtendo os resultados necessários para comparações de eficiência entre eles.

PALAVRAS-CHAVE: Oscilador Duffing. Expoente de Lyapunov. Enxame de Partículas. Método de R2W.

ABSTRACT: This paper presents a study of inverse problems applied in the Duffing oscillator. Thus it is estimated an overdrive in the oscillator and makes use of the Lyapunov exponent to evaluate the sensitivity to initial conditions. To optimize the parameter were implemented stochastic methods of particle swarm (Particle Swarm Optimization) and Random Restricted Window (R2W). Matlab software was used to create routines in each method getting the results needed for efficiency comparisons between them.

KEYWORDS: Duffing oscillator. Lyapunov exponent. Swarm Particle. Random Restricted Window.

1. INTRODUÇÃO

De acordo com [1], causas, em um modelo matemático, são condições iniciais e de contorno, termos de fontes/su- midouros e propriedades do sistema, e efeitos são as propriedades calculadas a partir de um modelo matemático. Então, segundo [2], resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados. Em geral, esses efeitos contêm imprecisões por causa de dados com ruídos ou erros experimentais. Em contrapartida, um problema direto necessita do conhecimento completo do modelo matemático.

Problemas inversos são considerados problemas mal-postos por não cumprir as condições matemáticas de existência e unicidade. Conforme [3], o problema inverso mal-posto é de um modo geral reformulado em termos de um problema bem-posto para que a solução seja possível. Existem vários métodos de solução para problemas inversos como inversão direta, métodos bayesianos, filtros digitais entre outros. O uso de problemas inversos faz parte de um novo paradigma de pesquisa, onde as simulações computacional e experimental não são realizadas isoladamente, mas sim de forma interativa, a fim de que o máximo de informação sobre o problema físico em questão seja obtido com as duas análises [4].

A possibilidade para a ampla aplicação da teoria do caos se dá devido ao comportamento caótico estar vinculado às não linearidades existentes nos sistemas de interesse. Atualmente, têm-se evidências que sistemas dinâmicos de diversas áreas da ciência moderna possuem equações de governo não lineares que apresentam um comportamento caótico, incluindo engenharia, medicina, ecologia, biologia, comunicação, química, astronomia, economia [5].

Ainda segundo [5], o comportamento caótico pode ser útil e desejável. A mistura de dois fluidos, por exemplo, pode ser obtida com maior eficácia a partir de um comportamento

caótico. No caso da exploração de áreas por robôs autônomos, trajetórias caóticas são mais eficientes que trajetórias aleatórias. Além disso, há casos em que a riqueza de trajetórias presente no comportamento caótico e a possibilidade de levar o sistema para uma dessas trajetórias, com baixo gasto de energia, tornam interessante este tipo de resposta.

No trabalho de [5], foi considerado a reconstrução do espaço de estado a partir do sinal de posição, a análise do domínio de frequência e a determinação dos expoentes de Lyapunov e da dimensão do atrator. Posteriormente foi avaliada a determinação dos expoentes de Lyapunov em séries temporais contaminadas por ruídos e oriundas de um modelo matemático de pêndulo não linear [6].

Um sistema de Duffing pode descrever uma série de fenômenos físicos importantes que podem ser citados alguns como o de um circuito elétrico com uma indutância não linear e a viga de Moon & Holmes que trata a flambagem de uma viga elástica devido à ação de forças de corpo magnéticas [7,8]. Este sistema foi estudado por [9] onde foram combinados as equações de movimento e os dados em um conjunto de equações algébricas diferenciais (DAE). Em [10] estimam todos os parâmetros do sistema aplicando uma entrada aleatória Gaussiana de média zero com RMS de 20N.

Os métodos estocásticos de otimização são caracterizados pela realização de um grande número de avaliações da função objetivo em toda a região de busca, de forma a aumentar a probabilidade de encontrar o ótimo global da função objetivo. Além disso, estes métodos não precisam de uma estimativa inicial muito precisa da solução e não utilizam as derivadas para chegar ao ponto ótimo, evitando assim muitas das dificuldades associadas aos métodos mais tradicionais. São, portanto, algoritmos adequados para lidar com funções objetivo fortemente não lineares e para problemas onde não estão disponíveis boas estimativas iniciais para os parâmetros [4].

As técnicas inversas têm sido usadas na determinação de parâmetros importantes envolvidos nos processos indus-

triais. A utilização de métodos estocásticos vem aumentando nos últimos anos, demonstrando seu potencial no estudo e análise dos diferentes sistemas em aplicações de engenharia. As rotinas estocásticas são capazes de otimizar a solução em uma ampla gama de variáveis do domínio, sendo possível a determinação dos parâmetros de interesse simultaneamente [11]. Um procedimento de solução para um problema inverso geralmente requer sua reformulação em termos de um problema aproximado bem-posto, que utiliza algum tipo de técnica de regularização (estabilização), [4]. Este artigo utiliza o método dos mínimos quadrados para a regularização do sistema.

Este trabalho está dividido em cinco seções, além desta introdução, da seguinte maneira: a seção 2 apresenta os métodos estocásticos utilizados no trabalho. A seção 3 aborda o modelo do sistema a ser estudado bem como os expoentes de Lyapunov. Na seção 4 são apresentados os resultados dos métodos no modelo bem como suas características. Por fim, a última seção traz as conclusões.

2. METODOLOGIA

2.1 Análise do Modelo

Esta análise visa verificar se um modelo produz resultados lógicos em função de alterações em parâmetros de entrada e a necessidade de precisão desses parâmetros. A estabilidade da solução é avaliada sob uma condição *ceteris paribus*, por meio da qual o efeito da alteração no valor de um único parâmetro de entrada (ou uma única variável de entrada) é considerado, enquanto todos os outros são mantidos constantes [12].

Em problemas que envolvem parâmetros com diferentes ordens de magnitude, os coeficientes de sensibilidade com respeito aos vários parâmetros podem ser diferentes em ordens de grandeza, criando assim dificuldades na comparação e identificação da dependência linear. Esta dificuldade pode ser aliviada através de uma análise dos coeficientes de sensibilidade reduzidos.

2.2 Enxame de Partículas (PSO)

No trabalho de [13] consideram o PSO como uma das melhores técnicas de otimização. Ela converge para a solução ótima em muitos problemas onde a maioria dos métodos analíticos não converge.

Desenvolvida em [14], a otimização por enxame de partículas (PSO) é uma técnica estocástica baseada na população. Criada a partir do modelo do comportamento social de um bando de aves à procura de locais para criar seus ninhos, a técnica considera a inteligência coletiva como uma forma de melhor busca de solução por meio da iteração entre seus indivíduos, ao contrário de um único agente totalmente isolado, carregar a informação. Este método tenta equilibrar a inteligência social e a cognitiva dos indivíduos, conforme [15] quando a individualidade é aumentada, a busca de locais alternativos para aninhamento é também aumentada. No entanto, se for demasiado elevada, o indivíduo nunca pode encontrar o melhor local. Por outro lado, quando a sociabilidade é aumentada, o indivíduo aprende mais com a experiência dos seus vizinhos, porém, se for muito alto, todos os

indivíduos podem convergir para o primeiro mínimo encontrado, que poderá ser um mínimo local.

O processo inicia com uma população de solução aleatória que ao passar das iterações buscam novas soluções. Cada partícula possui sua posição e velocidade, onde p_i é a posição da partícula na iteração k . A melhor posição de cada partícula (inteligência cognitiva) é guardada em p_{best} e a melhor posição de todos os indivíduos durante todas as iterações (inteligência social) é mantida em p_{gbest} . Durante a cada iteração, a velocidade é atualizada por uma velocidade anterior determinada por:

A equação para otimização da posição de cada partícula é dada na forma da Eq 1:

$$V_i^{k+1} = \alpha V_i^k + \beta_c r_1 (X_{C_i}^k - X_i^k) + \beta_s r_2 (X_G - X_i^k) \quad (1)$$

onde V_i^{k+1} e X_i^k correspondem à velocidade e à posição da partícula i na iteração k , respectivamente, α sendo o parâmetro inercial, β_c o aprendizado cognitivo, o β_s aprendizado social e r_1 e r_2 como números aleatórios entre 0 e 1, que ajudam as partículas a escapar de mínimos locais na função objetivo. Enquanto o X_i^k representa a melhor posição da partícula em todas as suas iterações, o X_G corresponde à melhor posição de todas as partículas durante todas as iterações. O algoritmo requer, então, que sejam fornecidas as posições iniciais de cada partícula, onde será analisada a função objetivo agregada a elas, que resultará em um X_G para a população, e cada uma dessas posições representará o X_i^k da partícula, uma vez que não foi realizado nenhum processo iterativo a posição arbitrada é a melhor encontrada até o momento. Para cada iteração, deverá ser calculada a nova posição da partícula, na forma:

$$X_i^{k+1} = X_i^k + V_i^{k+1} \quad (2)$$

Esse valor deve ser atualizado a fim de minimizar a função objetivo. Como se trata de um método numérico acontecerá dessa minimização não ser igual a zero na maioria dos casos, então o processo iterativo repete-se até o intervalo de erro seja atendido [13].

2.3 Random Restricted Window (R2W)

O R2W é um método de otimização proposto por [16] para a solução de problemas inversos formulados implicitamente. O R2W é um método básico que analisa a melhor solução de uma função não linear a partir de estimativas de parâmetros aleatórios pertencentes a um domínio pré-definido, podendo utilizar mais de uma fase de pesquisa para refinar a solução [11].

É considerado um método estocástico simples, o qual utiliza um algoritmo de busca com uma distribuição aleatória. O algoritmo aleatório R2W, analisa a função objetivo a partir de estimativas aleatórias (ζ_i) pertencentes a um domínio definido (Ω) para os parâmetros que se deseja obter, escolhendo as melhores soluções nos intervalos de valores estimados para os parâmetros em que a função objetivo apresenta menor resíduo.

$$Z = f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots) \quad (3)$$

$$\zeta_i = \zeta_{iL} + R(\zeta_{iH} - \zeta_{iL}) \quad (4)$$

Onde ζ_{il} e ζ_{iH} representam respectivamente o menor e o maior valor do parâmetro, ou seja, o intervalo ao qual as estimativas pertencem, sendo R um número aleatório no intervalo $0 \leq R \leq 1$. O procedimento representado na Eq 4 é repetido para cada parâmetro ζ_p , obtendo valores aleatórios pertencentes ao domínio definido conforme o número de parâmetros desejados [17].

Após gerar todas as estimativas aleatórias pertencentes a um domínio para os parâmetros conforme o número de parâmetros definidos a priori, os resultados das simulações são comparados com os dados experimentais a fim de encontrar as melhores soluções. Para descobrir quais os valores para os parâmetros apresentam as melhores soluções é feita uma avaliação da soma dos resíduos quadrados Q[17].

$$Q = \sum_{i=1}^{np} (C_{exp} - C_{sim})^2 \quad (5)$$

Onde C_{exp} e C_{sim} correspondem respectivamente aos dados experimentais, os dados simulados e o número de dados experimentais [17].

Após a busca aleatória inicial, uma nova fase de busca é realizada em uma janela de domínio restrito, próxima às melhores soluções obtidas na fase anterior, sendo o novo intervalo de busca definido pelo fator de restrição (δ) através das Eq 6 e Eq 7, onde corresponde à melhor solução para o parâmetro encontrado na fase anterior ψ_1 .

$$\zeta_L = \zeta_1^* - \delta \cdot (\zeta_1^*) \quad (6)$$

$$\zeta_H = \zeta_1^* + \delta \cdot (\zeta_1^*) \quad (7)$$

Na busca por uma solução melhor uma terceira fase é realizada, repetindo o procedimento das etapas, Eq 6 e Eq 7, realocando a janela de domínio restrito [17]. Este procedimento é mantido até que se obtenha um resultado que respeite a tolerância estabelecida.

3. SISTEMA DUFFING

A equação de Duffing é usada para descrever a dinâmica não linear de sistemas elétricos e mecânicos, e recebeu este nome em homenagem aos estudos de G. Duffing na década de 1930. Do ponto de vista mecânico, admite-se que a mola possui um comportamento linear para pequenos deslocamentos, passando a um comportamento não linear na medida em que o deslocamento aumenta [18]. A representação mecânica do oscilador (Fig. 1) pode ser feita pelo sistema massa-mola-amortecedor em função da restituição da mola e do amortecimento.

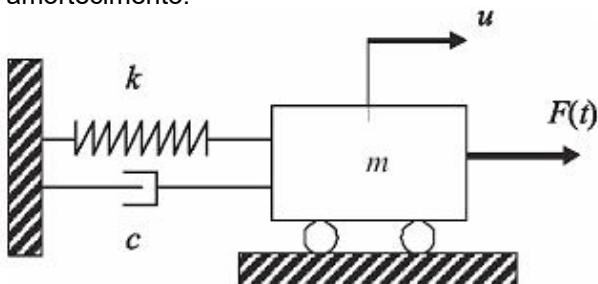


Fig 1: Oscilador Massa-Mola-Amortecedor.

Propondo uma força de restituição com uma linearidade cúbica e um amortecimento viscoso linear, tem-se que $k(u)$:

$$k(u) = k_0 u + k_1 u^3 \quad (8)$$

$$c(u, v) = cu \quad (9)$$

O sinal dos parâmetros k_0 e k_1 definem o tipo de mola. Conforme [18], se $k_0 > 0$ tem-se uma mola linear para pequenos deslocamentos e então o sinal de k_1 irão definir o endurecimento da mola, para $k_1 > 0$, ou o amolecimento da mola, para $k_1 < 0$.

Pelo balanço de forças:

$$c(u, v) = cu \quad (9)$$

Pondo-se as Eq 8 e Eq 9 na Eq 10, e admitindo um forçamento periódico harmônico, tem-se:

$$m\ddot{u} + C(u, v) + K(u) = F(t) \quad (10)$$

$$\ddot{u} + \alpha + \gamma + \beta u^3 = \mu \text{sem}(\Omega t) \quad (10)$$

Onde α é uma constante positiva relacionada ao amortecimento, γ uma constante positiva para mola linear ou negativa para a força de restituição conhecida como duplo poço e β indica o grau de não linearidade (relacionado à rigidez). Os valores dos parâmetros a serem utilizados na Eq 11 são apresentados na Tab. 1.

Tabela 1: Parâmetros Utilizados no Estudo do Caso

Variável	Valor
α	0.2
γ	-1
β	1
Ω	1

3.1 Expoente de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são calculados para a análise da sensibilidade do sistema em relação às condições iniciais submetidas. Eles avaliam a taxa de divergência de trajetórias e, portanto quantificam a sensível dependência com relação às condições iniciais.

A divergência entre trajetórias vizinhas pode ser avaliada a partir de uma trajetória de referência $\phi(x1, t)$, a partir da qual se define uma vizinhança em um instante inicial. Esta vizinhança é definida através de uma esfera de diâmetro . De fato, trata-se de uma hiper-esfera cuja dimensão está associada à dimensão do sistema. Na medida em que o sistema evolui no tempo, avalia-se como uma trajetória vizinha $\phi(x2, t)$, onde $x2$ está contido na esfera definida a partir de , diverge da trajetória de referência $\phi(x1, t)$, [18].

De fato, no caso de sistemas dinâmicos de tempo contínuo, a composição do espectro de Lyapunov (conjunto de todos os expoentes da dinâmica) fornece um substrato sólido para a determinação da estrutura topológica do atrator (ponto fixo, ciclo limite, toro ou atrator estranho) de forma livre de ambiguidades. Por exemplo, dinâmicas caóticas possuem pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, ou seja, pelo

menos uma direção expansiva no espaço de fase [19].

Segundo [18], quando o sistema dinâmico possui um modelo matemático estabelecido que permita a sua linearização em torno de uma determinada trajetória, os expoentes de Lyapunov podem ser calculados com precisão a partir do algoritmo proposto por [20].

Usando os valores determinados (Tab. 1) na Eq 13 e o algoritmo proposto por [20] são apresentados os expoentes de Lyapunov do sistema, (Fig. 2a e Fig. 2b).

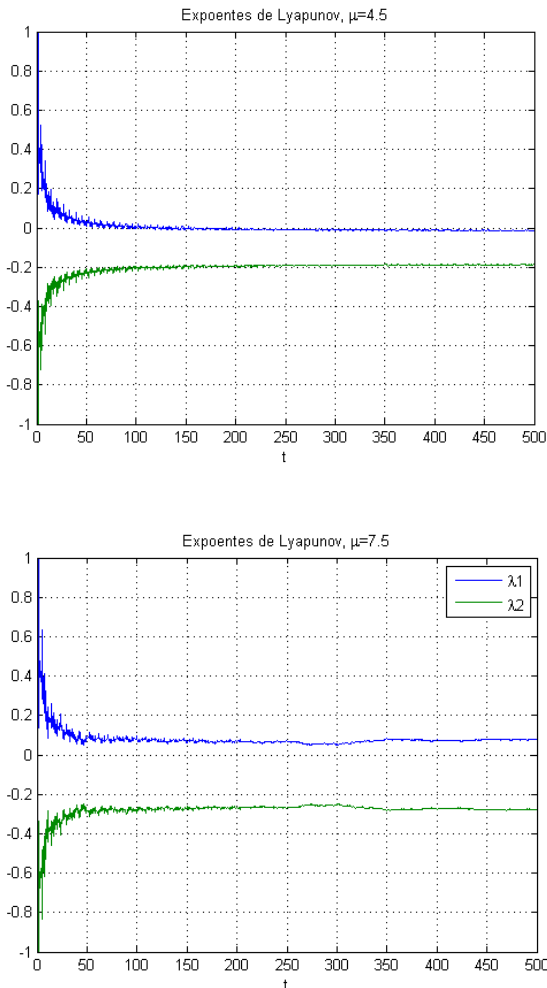


Fig 2: Parâmetros utilizados no estudo do caso. (a) =4.5. (b) =7.5.

Alterando os valores de μ no sistema, nota-se que para o valor de 7.5 o sistema é caótico, pois possui um dos expoentes de Lyapunov positivos. Já para $\mu = 4.5$ o sistema possui dois expoentes negativos que é possível afimar sua convergência. Para a estimativa deste forçamento, este artigo trabalha com $\mu = 7.5$.

Para uma melhor regularização por mínimos quadrados, é necessário fazer uma reamostragem dos dados utilizados, pois, nota-se que a amplitude (Fig. 2) onde $0 \leq t < 50$, são muito maiores que no intervalo $50 \leq t < 500$ isso faz com que a função objetivo não seja tão precisa. Para tal, se fez a reamostragem dos dados para $50 \leq t < 500$.

3.2 Estimativas de Parâmetros

O artigo propõe a utilização de métodos estocásticos para a estimativa do parâmetro μ , forçamento do oscilador Duffing. Esta estimativa está representada em diagrama funcional (Fig. 3). Os métodos utilizados são o Enxame de Partículas e o Random Restricted Window (R2W) apresentados

anteriormente.

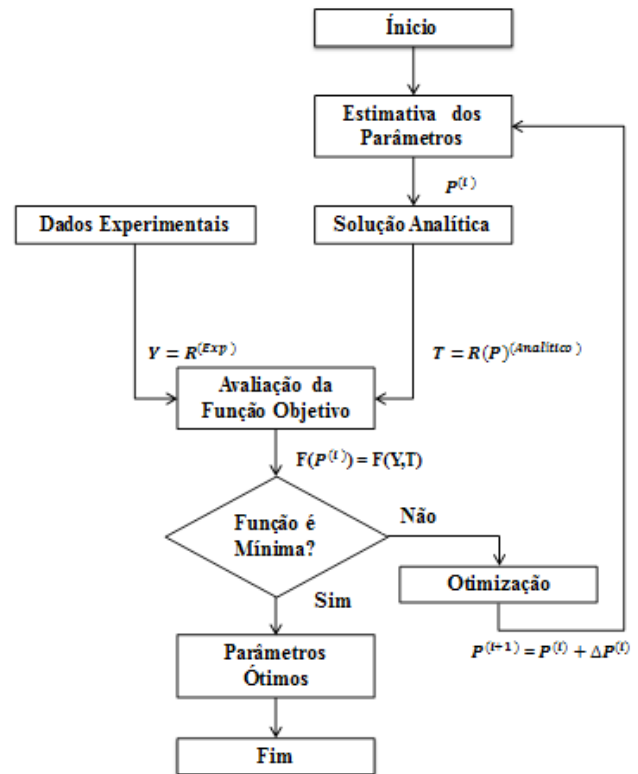


Fig 3: Diagrama Generalizado para Estimativa de Parâmetros.

Para o método de enxame de partículas, foi escolhido uma população de cinco indivíduos que geram valores aleatórios para o forçamento. Os valores de aprendizagem cognitiva e social são os mesmos, $\beta = 0.5$. E o valor da inércia das partículas é $\alpha = 1$.

Em contrapartida, no R2W, fora proposto o parâmetro $\Delta = 0.001$ por ter apresentado melhor desempenho. Além disso, a janela de restrição inicial tem intervalos entre [6, 9].

4. RESULTADOS

Para a análise de sensibilidade, foi proposto estudar os efeitos dos parâmetros e do oscilador Duffing, representado na Eq 11. Desta forma, o gráfico representa a variação de entre 1, 5 e 10 e manteve-se constante o parâmetro (Fig. 4).

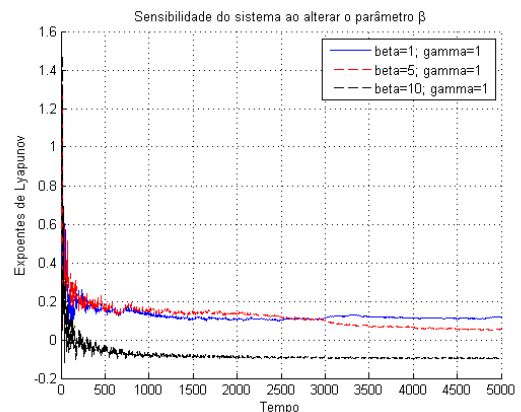


Fig 4: Sensibilidade do Sistema Duffing às mudanças de .

É notável a sensibilidade do parâmetro β no sistema do oscilador onde para valores de 1 e 5, o sistema apresenta um comportamento caótico. Já para $\beta = 10$, o sistema converge

para um ponto.

Na variação do parâmetro γ , (Fig. 5), é visualizada sua variação entre -1, -5 e 1 e $\beta=1$. Neste caso, para $\gamma < 0$ o expoente de Lyapunov $\lambda > 0$, o que se conclui que o sistema é caótico. Já para $\gamma > 0$ o sistema apresenta uma convergência.

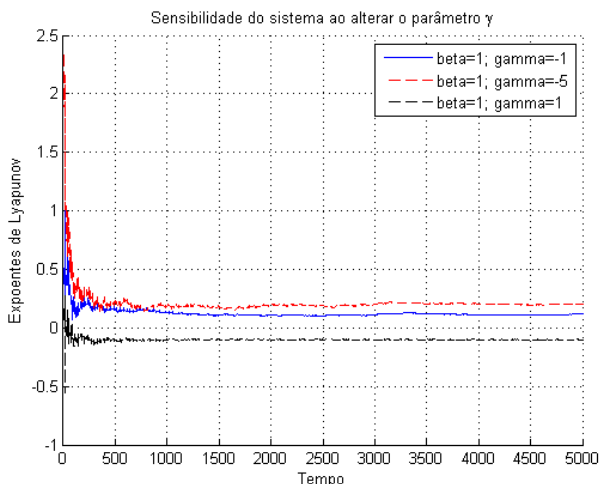


Fig 5: Sensibilidade do Sistema Duffing às mudanças de γ .

4.1 Enxame de Partículas – Particle Swarm Optimization

O gráfico apresenta as curvas da solução analítica e da solução com parâmetro estimado com o método de enxame de partículas (Fig. 6). Os parâmetros de avaliação da eficiência deste método são apresentados na Tab. 2.

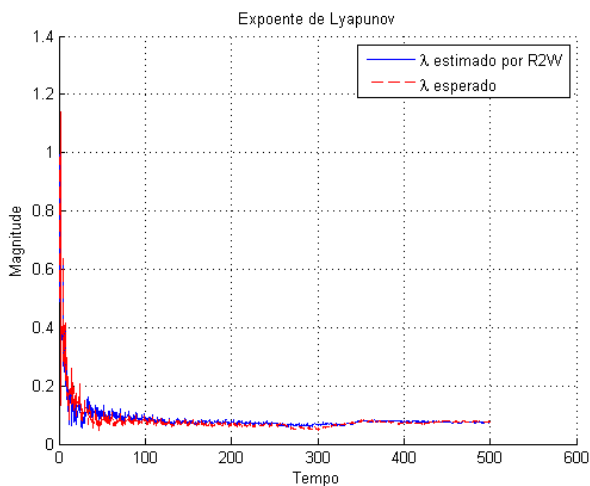


Fig 6: Curva de resposta da solução analítica utilizando o valor de desejado e o estimado.

Tab 2: Parâmetros de eficiência do método Enxame de Partículas.

Variável	Valor
Tempo (s)	1,0871.10 ⁴
Iterações	32
Resíduo ($\mu - \mu_{\text{ótimo}}$)	0,0051

4.2 Random Restricted Window – R2W

O Gráfico apresenta as curvas da solução analítica e da solução com parâmetro estimado com R2W (Fig. 7). Note que, a curva da solução analítica (esperada) e a da solução

por R2W (estimado) apresentam um comportamento similar com erro de 0.06. Os parâmetros de avaliação da eficiência do método são apresentados na Tab. 3.

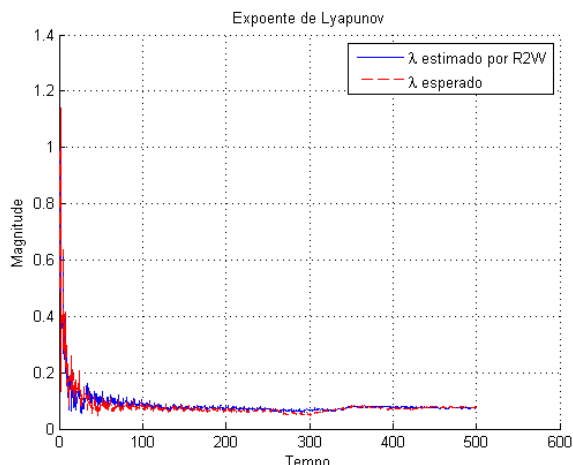


Fig 7: Curva de resposta da solução analítica utilizando o valor de μ desejado e o estimado.

Tab 3: Parâmetros de eficiência do método Enxame de Partículas.

Variável	Valor
Tempo (s)	5,2782.103
Iterações	50
Resíduo ($\mu - \mu_{\text{ótimo}}$)	0,0594

5. CONCLUSÃO

Para métodos estocásticos, é necessária a criação de dados aleatórios gerados em grande quantidade para que a solução possa convergir mais rapidamente. No caso do enxame de partículas, como foi utilizado uma população de cinco partículas, a função converge para um valor próximo ao do esperado, $\mu = 7.5051$. Para o método R2W, com o mesmo número de população, a função não convergiu no valor limite de iterações imposta. Mesmo assim, consegui um resíduo de 0.0594. Em relação ao tempo, o R2W foi dez vezes mais rápido por ser um algoritmo de comandos simples. Porém, o resíduo foi menor para o enxame e encontrado em menor tempo que o do R2W.

Portanto, apesar de os métodos trabalharem com dados aleatórios, e mesmo com população muito baixa, eles conseguiram convergir para valores aceitáveis de μ para que o sistema seja caótico. Um estudo posterior pode gerar melhores resultados para populações muito maiores para que convergência seja muito mais rápida e muito mais precisa.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo suporte financeiro durante a pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Campos Velho H.F. (2008). Introdução aos Problemas Inversos: Aplicações em Pesquisa Espacial. Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE.

- [2] Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. (1996). Regularization of Inverse Problems: Mathematic and its Applications. Kluwer.
- [3] Ozisik M.N., Orlande H. R.B. (2000). Inverse Heat Transfer. New York: Taylor & Francis.
- [4] Cotta, C. (Dezembro de 2009). Problemas Inversos de condução de calor em meios heterogêneos. Análise teórico-experimental via transformação integral, inferência Bayesiana e termografia por infravermelho. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Tese (Doutorado) - UFRJ/COPPE.
- [5] De Paula A.S., (2010). Controle de Caos em Sistemas Mecânicos. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil: Tese (Doutorado) - UFRJ/COPPE.
- [6] Franca L.F.P, Savi M.A., (2003). Evaluating Noise Sensitivity on the Time Series Determination of Lyapunov Exponents Applied to Nonlinear Pendulum. Shock and Vibration, v. 10, n. 1, p. 37-50.
- [7] Moon F.C. (1987). Chaotic Vibrations. John Wiley & Sons.
- [8] Moon F.C. (1992). Chaotic and Fractal Dynamics. John Wiley & Sons.
- [9] Liu C.S., (2013). Na iterative $GL(n,R)$ method for solving nonlinear inverse vibration problems. Nonlinear Dyn (2013) 74:685-699. Springer.
- [10] Gandino E., Marchesiello S., (2010). Identification of a Duffing Oscillator under Different Types of Excitation. Mathematical Problems in Engineering, v. 2010.
- [11] Ribeiro M.A.C., Neto A.J.S.N, Câmara L.D.T. (2012). Estimativa dos parâmetros cinéticos de adsorção através dos métodos estocásticos LJ e R2W. ISSN 2317-3297. Brasil: Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional - CMAC Nordeste.
- [12] Júnior J.C.F.B, Ferreira P. A., Hedden-Dunkhorst B. , Andrade C.L.T. (Jan./Feb. de 2008). Modelo computacional para suporte à decisão em áreas irrigadas. Parte I: Desenvolvimento e análise de sensibilidade. Rev. bras. eng. agríc. ambient. vol.12 no.1 Campina Grande.
- [13] Sadek H.E., Zhang X., Rashad M., Cheng C. (06 de Abril de 2014). China: School of Energy and Power Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094.
- [14] Kennedy, J. e Eberhart, R. 1995. Particle Swarm Optimization. Proc. IEEE Int. Conf. Neural Networks. 1995, Vol. 4, pp. 1942-1948.
- [15] Colaço, J.M., Orlande, H.R.B. e Dulikravich, G.S. 2004. Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer. 10th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering. 2004.
- [16] Câmara L.D.T., Neto A.J.Silva. (2008). Inverse stochastic characterization of adsorption systems by a Random Restricted Window (R2W) method. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brazil: International Conference on Engineering Optimization.
- [17] Bihain A.L.J., Camara L.D.T., Neto A.J.S. (2012). Avaliação da Rotina Inversa R2W na Estimativa de Parâmetros de Transferência de Massa no Processo de Adsorção de Glicose e Frutose. Tend. Mat. Apl. Comput., 13, 277-289. doi: 10.5540/tema.2012.013.03.277: Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional.
- [18] Savi M.A., (2006). Dinâmica não-linear e caos. Rio de Janeiro, Brasil.
- [19] Monteiro L.H.A., (2006). Sistemas Dinâmicos, Mack Pesquisa São Paulo.
- [20] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A., (1985). Determining lyapunov exponents from a time series, Physica D: Nonlinear Phenomena 16(3): 285-317.