Cálculo Numérico de Raízes

*José Paulo Dieguez**

1. INTRODUÇÃO

Imaginemos uma situação em que se necessite extrair uma raiz cúbica ou quíntupla de um número qualquer, e não dispomos de um computador ou de uma máquina de calcular científica. Até mesmo se dispusermos apenas de uma simples calculadora de quatro operações, essa tarefa será considerada, para a maioria das pessoas, quase impossível. Existem, entretanto, recursos de cálculo numérico que facilitam consideravelmente esse tipo de cálculo, permitindo que se encontre o resultado com a precisão que se desejar.
Um desses recursos do cálculo numérico é o método da iteração linear para resolver equações e que, para esse tipo de cálculo, utiliza apenas as quatro operações. É lógico que uma calculadora de quatro operações, das mais simples, seria de muita ajuda.

*Chefe da Seção Técnica da Diretoria de Obras de Cooperação - (DOC) - Brasília - DF

2. O MÉTODO DA ITERAÇÃO LINEAR

Seja resolver a equação f(x) = 0. O método da iteração linear consiste em obtermos, a partir desta equação, uma outra do tipo x = g(x) e, atribuindo-se um valor inicial a x, calcular o valor de g(x) o qual será atribuído novamente a x, e assim por diante, de forma que, iterativamente, esse valor convergirá para o resultado desejado. Graficamente, esse procedimento corresponde a encontrar o ponto de intersecção da curva que representa a função g(x) com a reta y = x, cuja abcissa coincide com a raiz da equação f(x) = 0 que se deseja conhecer.

Como exemplo, podemos calcular a raiz da equação e^x-5x = 0 com quatro casas decimais. Temos, portanto, nessa equação, f(x) = e^x-5x e a equação de iteração, x = g(x), pode ser x = e^x /5. Atribuindo-se o valor inicial zero para x, podemos calcular o valor de x que satisfaz a equação, conforme mostra a tabela a seguir.

x	$e^x / 5$
0,0000	0,2000
0,2000	0,2443
0,2443	0,2553
0,2553	0,2582
0,2582	0,2589
0,2589	0,2591
0,2591	0,2592
0,2592	0,2592

Portanto, a raiz da equação, com quatro casas decimais, é 0,2592.

3. CALCULO DA RAIZ QUADRADA

Seja calcular a raiz quadrada de um número m, a qual chamaremos de r, ou seja $r=\sqrt{m}$. Se q for o quadrado perfeito imediatamente superior a m, e a sua raiz exata for p, ou seja, $p = \sqrt{q}$, temos que $r = p-x$, onde x é um valor fracionário ($0\leq x\leq 1$) que representa a diferença entre a raiz desejada e o número inteiro imediatamente superior a ela (p).
Temos, portanto, que $r^2 = (p-x)^2 = m$, ou ainda, $p^2-2px+x^2= m$. A equação de iteração escolhida será:

$$x = \frac{p^2 - m + x^2}{2.p}.$$

Atribuindo-se valor inicial zero para x no lado direito da expressão acima, e calculando-se, iterativamente, os seus novos valores até que os dois lados da expressão tenham o mesmo valor, dentro da tolerância de erro desejada, podemos calcular o valor da raiz $r = p-x$.

Por exemplo, seja calcular $r = \sqrt{452,3}$, com quatro casas decimais. O quadrado perfeito imediatamente superior a 452,3 é q = 484, cuja raiz é p = 22. Assim podemos montar a equação de iteração

$$x = \frac{484 - 452,3 + X^2}{2.\,22} = \frac{31,7 + X^2}{44}$$

Podemos, então, organizar a seguinte tabela:

x	$\dfrac{31{,}7 + x^2}{44}$
0,0000	0,7205
0,7205	0,7323
0,7323	0,7326
0,7326	0,7327
0,7327	0,7327

Logo, a raiz procurada, com aproximação de quatro casas decimais, é r = p-x = 22-0,7327, ou seja, r =21,2673.

4. CALCULO DA RAIZ CÚBICA

Seja calcular a raiz cúbica de um número m qualquer, que chamaremos de r, ou seja $r = \sqrt[3]{m}$. Se q for o cubo perfeito imediatamente superior a m, e p a sua raiz cúbica exata, seguindo a mesma linha de raciocínio do ítem anterior, temos que r = p-x, onde $0 \leq x \leq 1$. Logo, temos que $r^3 = (p-x)^3 = m$, ou ainda, $p^3-3p^2x+3px^{-2}-x^3 = m$. A equação de iteração pode ser obtida tirando-se o valor de x na equação anterior, ou seja:

$$x = \frac{p^3-m+3px^{-2}-x^3}{3p^2}.$$

Por exemplo, seja calcular $\sqrt[3]{678{,}4}$ com uma aproximação de 4 casas decimais. Temos, portanto, que m = 678,4 e o cubo perfeito imediatamente superior a q = 729, cuja raiz cúbica exata é p = 9. Podemos, então, montar a equação de iteração

$$x = \frac{729-678{,}4+3.9.x^2-x^3}{3.9^2} = \frac{50{,}6+27x^2-x^3}{243}$$

e organizar a tabela seguinte para o cálculo iterativo:

x	$\dfrac{50{,}6+27x^2-x^3}{243}$
0,0000	0,2082
0,2082	0,2130
0,2130	0,2132
0,2132	0,2132

Logo a raiz cúbica procurada, com quatro casas decimais, é r = 9-0,2132 = 8,7868.

5. CÁLCULO DE $n\sqrt{m}$ PARA m E n QUAISQUER

Seguindo os mesmos raciocínios anteriores, seja $r = {}^{n}\sqrt{m}$ e $q = p^n$ a potência n perfeita imediatamente superior a m. Logo, temos que $x = p-r$ e $r^n = (p-x)^n$. Desenvolvendo o binômio de Newton $(p-x)^n$, temos:

$$(P-x)^n = p^n + \sum_{i=1}^{n} [(-1)^i . (i) .p^{n-i}. x^i] = m, \text{ ou ainda,}$$

$$(P-x)^n = p^n - n. p^{n-1} . x + \sum_{i=1}^{n} [(-1)^i. (i). p^{n-1}. x^i] = m, \text{ onde}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!.\ i!} \text{ é a número binomial.}$$

A equação de iteração pode ser obtida isolando-se o x na equação acima:

$$x = \frac{p^n-m+\sum_{i=2}^{n} [(-1)^i. (i). p^{n-1}. x^i]}{n.\ p^{n-1}}.$$

Podemos notar que, para valores elevados de n, a expressão acima se toma muito complexa e o cálculo muito trabalhoso. Este inconveniente, no entanto, será praticamente eliminado no próximo item, quando apresentaremos uma otimização do método.

Como exemplo, calcularemos $r=5\sqrt{923,6}$ com quatro casas decimais. temos que a potência perfeita de 5 imediatamente superior a 923,6 é q = 1024, cuja raiz quíntupla é p-4. Assim podemos montar a equação de iteração:

$$x = \frac{1024-923,6 + \sum_{i=2}^{5} [(-1)^i. (i). p^{n-1}. x^i]}{5.\ 4^4} = \frac{100,4+640x^2-160x^3+20x^4-x^5}{1280}$$

Podemos, então, organizar a tabela seguinte para o cálculo iterativo:

x	$\frac{100,4+640x^2-160x^3+20x^4-x^5}{280}$
0,0000	0,0781
0,0781	0,0814
0,0814	0,0817
0,0817	0,0817

Logo, a raiz procurada será:

$$r = 4 - 0{,}0817 = 3{,}9183.$$

6. OTIMIZAÇÃO DO MÉTODO

Como já foi observado e se pode verificar no ítem anterior, à medida em que ri aumenta, a equação de iteração se toma cada vez mais complexa, podendo até mesmo inviabilizar o cálculo da raiz por este processo. Pode-se, no entanto, eliminar esse inconveniente se, em vez de alterarmos somente o valor de x na função de iteração, recalcularmos também o valor de p em função do seu valor anterior, aproximando-o cada vez mais do resultado procurado. O valor de x, naturalmente, a cada iteração, aproximar-se-á de zero e, quando atingir a tolerância de erro estabelecida, o último valor de p calculado será a raiz desejada.

Nesse novo procedimento, portanto, inicia-se x com o valor X_0=O e p com o valor p_o igual à raiz inteira da potência ri perfeita imediatamente superior ao número m do qual se deseja extrair a raiz. Em seguida calculam-se, iterativamente, os valores

$$p_i = p_{i-1} \text{ e } x_i = \frac{P_i^n - m}{n.\ p_i^{n1}} \text{ até que } x_i$$

atinja um valor dentro da tolerância de erro estabelecida, quando então p_i será o resultado procurado.

Seja, por exemplo, calcular $r = \sqrt[7]{478\text{-},8}$ com quatro casas decimais. A potência perfeita de 7 imediatamente superior a 478,8 é q = 2187, cuja raiz inteira exata é p = 3. Iniciando o processo com x_o = O e p_o = 3, podemos montar a tabela seguinte para o cálculo iterativo.

i	$P_i = p_{i1} - x_{i-1}$	$X_i = \dfrac{P_i^7 - 478{,}8}{7.\ p_i^6}$
1	3	0,3347
2	2,6653	0,1899
3	2,4752	0,0563
4	2,4191	0,0043
5	2,4148	0,0000

A raiz procurada será, portanto, r = 2,4148, com a aproximação de 4 casas decimais.

7. CONCLUSÃO

O método apresentado é mais uma curiosidade matemática do que uma ferramenta de cálculo de grande utilidade, se considerarmos os recursos de cálculo disponíveis atualmente, tais como os computadores e as diversas calculadoras científicas. Na década de 60 e até meados da década de 70, quando tais recursos eram de uso muito restrito, sem dúvida, ele teria sido de grande valia para aqueles que necessitavam fazer esses cálculos com frequência. Entretanto, se o leitor, algum dia, precisar calcular uma raiz, impossibilitado de utilizar os modernos recursos existentes, dispondo apenas de uma simples calculadora de quatro operações, este método poderá ser de grande utilidade.