

Método analítico de identificação de sistemas multivariáveis no domínio da frequência

Roberto Ades e Bruno de Pinho Silveira***

Resumo

Este trabalho apresenta um método analítico no domínio da frequência para identificação de modelos lineares de plantas com múltiplas entradas e saídas. O modelo é calculado pela minimização de um critério bem definido baseado em norma quadrática. As respostas em frequência dos vários canais do modelo são ajustadas às correspondentes respostas em frequência medidas dos canais da planta. Os modelos são calculados sob a forma de matriz função de transferência, a partir da expansão de um conjunto gerador. Considera-se que as plantas utilizadas possam ser ajustadas por modelos lineares e invariantes no tempo. No caso de plantas com comportamento não-linear, a metodologia pode ser aplicada em pontos de operação dessas plantas para obtenção de modelos linearizados. No final do artigo, aplica-se a metodologia com bons resultados em três exemplos encontrados na literatura.

Palavras-chave

Identificação de sistemas, sistemas MIMO, resposta em frequência, conjuntos geradores.

Introdução

A síntese de uma lei de controle visa atender requisitos de robustez em estabilidade e desempenho dos sistemas sob análise. Naturalmente, o emprego da síntese requer, previamente, a obtenção de um modelo matemático que descreva adequadamente o comportamento dinâmico da planta. Um bom modelo é aquele que consegue representar a dinâmica do sistema satisfatoria-

mente sem apresentar uma complexidade matemática excessiva. Em geral, o modelo de um sistema pode ser obtido de duas maneiras distintas. A primeira consiste em utilizar as leis das ciências que regem a dinâmica do sistema. Entretanto, se o sistema a ser modelado for relativamente complexo, essa abordagem pode não ser eficiente. As técnicas de identificação surgem como uma alternativa numérica à modelagem convencional. Basicamente, consistem em estimar modelos

* Engenheiro Eletrônico, Instituto Militar de Engenharia - IME, Departamento de Engenharia Elétrica.

** Engenheiro Eletrônico, Indústria de Material Bélico do Brasil - IMBEL, Fábrica de Material de Comunicações e Eletrônica.

numéricos a partir de um conjunto de dados de entrada/saída medidos do sistema.

Nos últimos anos, muitas técnicas de identificação foram propostas, ora baseadas no domínio do tempo,^{[8],[12]} ora no domínio da frequência.^{[2],[4],[19],[25],[16]} As duas formas de identificação apresentam resultados bastante eficientes. Em,^[18] entretanto, são apresentadas algumas vantagens das técnicas que utilizam dados freqüenciais do sistema. Entre essas vantagens pode-se citar: maior facilidade para o tratamento do ruído, menor volume de dados para o ajuste do modelo, independência das condições iniciais e possibilidade de combinação dos dados medidos em vários experimentos.

No caso das técnicas de identificação no domínio da frequência, os dados utilizados para o ajuste do modelo correspondem às medidas de respostas em frequências dos canais da planta. A determinação do modelo é realizada pelo ajuste das respostas em frequência de seus canais aos correspondentes dados medidos, por intermédio da minimização de um critério de erro, também chamado de função objetivo.

Diversos trabalhos já discutiram o problema de identificação, porém com abordagens distintas como em^{[22],[6],[14],[5],[3]} que utilizaram o Método dos Mínimos Quadrados ou mesmo em^{[11],[10],[17],[9]}, que empregaram para estimação do modelo a norma H_{∞} . Em todos esses trabalhos, observa-se a preocupação em obter soluções analíticas, o que normalmente só é possível quando os problemas propostos são convexos nas variáveis de decisão.

O método proposto de identificação de sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) é uma extensão da abordagem monovariável apresentada em^[1]. Para ambos os casos, busca-se minimizar o erro de ajuste entre as respostas em frequência do modelo identificado e a do sistema

sob análise. As funções objetivo utilizadas são baseadas em norma quadrática. Os problemas de otimização resultantes são convexos. As soluções globais, obtidas por expansão de conjuntos geradores, são calculadas analiticamente para os sistemas lineares e invariantes no tempo monovariáveis e multivariáveis.

Para a metodologia MIMO proposta, os elementos das Matrizes Funções de Transferência (MFT) estimadas apresentam denominadores comuns, isto é, as Funções de Transferência (FT) dos canais compartilham o mesmo conjunto de pólos. A técnica multivariável permite a identificação simultânea de todos os canais, dadas as correspondentes respostas em frequência.

Ao final do artigo, são apresentados três exemplos acadêmicos nos quais a metodologia foi aplicada. O primeiro exemplo está relacionado com a identificação do modelo de um turbogerador. No segundo exemplo trata-se de um míssil ar-ar e no terceiro de uma aeronave de combate.

Formulação do problema e a metodologia proposta

Considere um sistema multivariável linear (ou linearizado em torno de um ponto de operação) com p entradas e q saídas e o conjunto \mathcal{A} de matrizes complexas com dimensões $q \times p$, representando as medidas $G(j\omega)$ de resposta em frequência em m valores na faixa de frequências de interesse $\underline{\omega} = [\omega_1 \ \omega_2 \ \dots \ \omega_m]^T$:

$$\mathcal{A} := \left\{ G(j\omega) \mid G(j\omega) \in \mathbb{C}^{q \times p}, \omega \in \underline{\omega} \right\} \quad (1)$$

Sejam ainda^[24]:

- $R(s)$ o conjunto de todas as funções de transferência próprias com coeficientes reais, de sistemas monovariáveis e invariantes no tempo; e
- $M(R(s))$ o conjunto das matrizes cujos elementos pertencem a $R(s)$.

A MFT identificada de um sistema MIMO com p entradas e q saídas deve ser tal que:

$$G_e(\underline{\theta}, s) \in M^{q \times p}(\mathbb{R}(s))$$

e sua representação matemática assumirá a forma:

$$G_e(\underline{\theta}, s) = \begin{bmatrix} G_{e,11}^n(s) & G_{e,12}^n(s) & \cdots & G_{e,1p}^n(s) \\ G_{e,21}^n(s) & G_{e,22}^n(s) & \cdots & G_{e,2p}^n(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{e,q1}^n(s) & G_{e,q2}^n(s) & \cdots & G_{e,qp}^n(s) \end{bmatrix}$$

onde $G_{e,\lambda}^n(s)$ são FT monovariáveis estimadas de ordem n , $\underline{\theta}$, o vetor de parâmetros a ser estimado e λ , um índice que indica o canal específico dentre todas as combinações possíveis entre as p entradas e q saídas do sistema sob análise, ou seja:

$$\lambda \in \Lambda = \{hi \mid i, h \in \mathbb{N} ; 1 \leq h \leq q ; 1 \leq i \leq p\} \quad (2)$$

O objetivo do problema de identificação proposto consiste em determinar um modelo $G_e(\underline{\theta}, s)$ linear, invariante no tempo e de complexidade limitada, tendo p entradas e q saídas, cuja resposta em frequência se aproxime dos dados de \mathcal{A} em (1), de acordo com um critério previamente estabelecido. Entende-se por complexidade limitada o fato de o modelo $G_e(\underline{\theta}, s)$ depender do vetor paramétrico real $\underline{\theta}$ de dimensão finita. O ajuste do modelo parametrizado $G_e(\underline{\theta}, s)$ aos dados medidos em \mathcal{A} buscará minimizar o seguinte erro aditivo:

$$E = \sum_{\lambda} \left\| G_{\lambda}(j\omega) - G_{e,\lambda}^n(j\omega) \right\|_2^2$$

onde $G_{\lambda}(j\omega)$ representa a resposta em frequência medida do canal λ , de acordo com (1) e (2).

As FT $G_{e,\lambda}^n(s)$ são racionais e próprias, sendo estimadas com ordem n . Para tanto, a representação destas funções adotará a seguinte expansão sob a forma de conjuntos geradores:

$$G_{e,\lambda}^n(\underline{\theta}, s) = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{\lambda} P_k(s) = \frac{N(\underline{\alpha}^{\lambda}, s)}{D(\underline{\beta}, s)} = \frac{\alpha_0^{\lambda} s^n + \alpha_1^{\lambda} s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}^{\lambda} s + \alpha_n^{\lambda}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n}$$

$$\text{onde } P_k(s) = \frac{s^{n-k}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n},$$

$$\underline{\alpha}^{\lambda} = [\alpha_0^{\lambda} \quad \alpha_1^{\lambda} \quad \cdots \quad \alpha_n^{\lambda}]^T \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\underline{\beta} = [\beta_1 \quad \beta_2 \quad \cdots \quad \beta_n]^T \in \mathbb{R}^n \text{ e}$$

$$\underline{\theta} = [(\underline{\alpha}^{\lambda})^T \quad \underline{\beta}^T]^T \in \mathbb{R}^{(n+1)pq+n} \quad (3)$$

Define-se um critério de custo aditivo $J(\underline{\theta})$, baseado em norma quadrática, por:

$$J(\underline{\theta}) = \sum_{\lambda} \left\| D(\underline{\beta}, j\omega) G_{\lambda}(j\omega) - N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\omega) \right\|_2^2 \quad (4)$$

sendo $N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\omega)$ e $D(\underline{\beta}, j\omega)$ as respostas em frequência dos numeradores de $G_{e,\lambda}^n(s)$ e do denominador comum de $G_e(s)$, respectivamente, e $\underline{\theta} = [(\underline{\alpha}^{\lambda})^T \quad \underline{\beta}^T]^T$ o vetor de parâmetros a ser determinado. Deseja-se calcular os zeros de $G_{e,\lambda}^n(s)$ e os pólos comuns de $G_e(s)$, minimizando a função custo em (4) e buscando determinar uma aproximação adequada aos dados de \mathcal{A} em (1).

O fluxograma da metodologia MIMO pode ser visto na figura 1. A primeira parte da metodologia se refere à obtenção da resposta em frequência do sistema sob análise, o que não é o foco desse artigo.

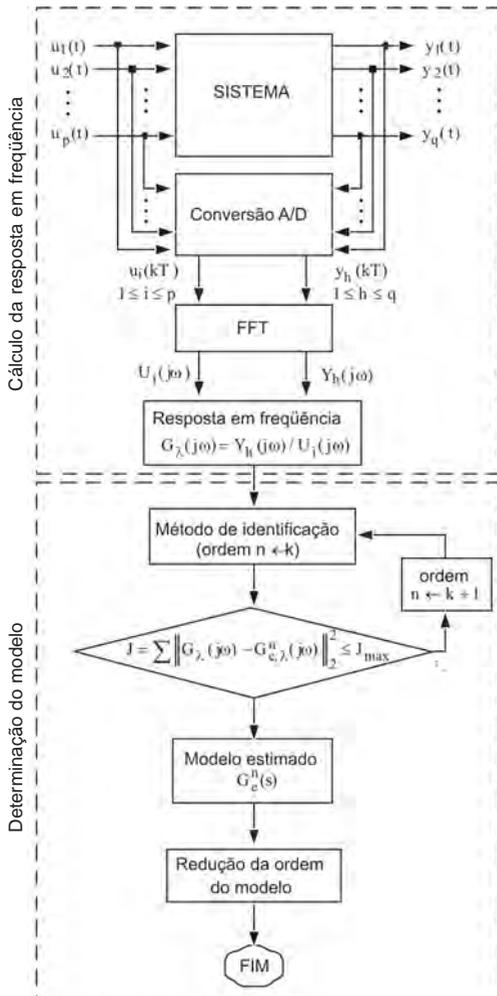


Figura 1 – fluxograma da metodologia de identificação proposta (MIMO)

A resposta em frequência pode ser determinada, basicamente, de duas maneiras: i) pelas respostas da planta em regime permanente em face da aplicação de sinais senoidais em suas entradas; ou ii) a partir da aplicação da FFT (*Fast Fourier Transformer*) nos sinais de excitação das entradas da planta e nas correspondentes respostas, conforme ilustrado na figura 1.

A segunda parte da metodologia, foco deste artigo, se refere à determinação do modelo. Para isso, utiliza-se o método proposto discutido na seção seguinte.

Este método calcula analiticamente os pólos comuns do modelo $G_e(s) \in M^{q \times p}(R(s))$ e os zeros de $G_{e,\lambda}^n(s)$ de maneira ótima, minimizando o critério $J(\underline{\theta})$ em (4). A ordem do denominador comum de $G_e(s)$ é gradativamente aumentada, visando reduzir o custo de ajuste a um valor previamente estabelecido. Dessa forma, obtém-se uma família de modelos que satisfazem o problema, parametrizada pela ordem n . A escolha da ordem mais adequada está baseada no compromisso entre a precisão necessária para se representar o comportamento da planta e a complexidade matemática desejada para o modelo.

Caso a ordem do modelo se torne elevada, os valores singulares de Hankel desse modelo poderão ser analisados, a fim de checar a possibilidade de realizar uma redução de ordem por truncamento balanceado^[26].

Embora não tenha sido explicitado na figura, considera-se que o modelo calculado ainda deva passar por uma fase de validação, após a redução de ordem.

Determinação do modelo

A solução ótima, segundo o critério descrito em (4), é obtida resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{\theta}} J(\underline{\theta}) &= \\ &= \min_{\underline{\theta}} \sum_{\lambda} \left\| D(\underline{\beta}, j\omega) G_{\lambda}(j\omega) - N(\underline{\alpha}^{\lambda}, j\omega) \right\|_2^2 \end{aligned}$$

onde $G_{\lambda}(j\omega)$ representa a resposta em frequência medida do canal $\lambda \in \Lambda$.

A expansão do somatório em (4) permite escrever:

$$\begin{aligned}
J(\underline{\theta}) &= \left\| D(\underline{\beta})G_{11} - N(\underline{\alpha}^{11}) \right\|_2^2 + \dots \\
&\dots + \left\| D(\underline{\beta})G_{qp} - N(\underline{\alpha}^{qp}) \right\|_2^2 \\
&= \sum_{i=1}^m \left| D(\underline{\beta})G_{11} - N(\underline{\alpha}^{11}) \right|^2 + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^m \left| D(\underline{\beta})G_{qp}(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}^{qp}) \right|^2 \\
&= \sum_{i=1}^m \Psi_{11}(j\omega_i)\Psi_{11}^*(j\omega_i) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^m \Psi_{qp}(j\omega_i)\Psi_{qp}^*(j\omega_i) \\
&\dots + \sum_{i=1}^m \left| D(\underline{\beta})G_{qp}(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}^{qp}) \right|^2 \quad (5)
\end{aligned}$$

onde $D(\underline{\beta})$, $N(\underline{\alpha}^\lambda)$ e G_λ são funções de $(j\omega_i)$ e $\Psi_\lambda(j\omega_i) := D(\underline{\beta}, j\omega_i)G_\lambda(j\omega_i) - N(\underline{\alpha}^\lambda, j\omega_i)$. Além disso, $\Psi_\lambda^*(j\omega_i) := \Psi_\lambda(-j\omega_i)$.

A soma de funções convexas é também uma função convexa^{[7], [23]}. Portanto, pode-se afirmar que o problema descrito em (5) é convexo nas variáveis $\underline{\alpha}^\lambda$ e $\underline{\beta}$ e possui solução ótima $\underline{\theta} = \underline{\theta}_{\min} = [(\underline{\alpha}_{\min}^\lambda)^T \ \underline{\beta}_{\min}^T]^T$ que satisfaz:

$$\begin{aligned}
\nabla J(\underline{\theta}_{\min}) &= \left(\frac{\partial J}{\partial \underline{\alpha}^{11}} \quad \dots \quad \frac{\partial J}{\partial \underline{\alpha}^{qp}} \quad \frac{\partial J}{\partial \underline{\beta}} \right)^T \Bigg|_{\underline{\theta}=\underline{\theta}_{\min}} \\
&= \mathbf{0}_{[(n+1)pq+n] \times 1} \quad (6)
\end{aligned}$$

Para um parâmetro $\theta_t \in \underline{\theta}$ descrito em (3), a diferenciação da expressão em (5) obedece a:

$$\frac{\partial J}{\partial \theta_t} = \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{\lambda} \left[\frac{\partial \Psi_{\lambda}}{\partial \theta_t} \Psi_{\lambda}^* + \Psi_{\lambda} \frac{\partial \Psi_{\lambda}^*}{\partial \theta_t} \right] \right\} \quad (7)$$

onde Ψ_{λ} e Ψ_{λ}^* são funções de $(j\omega_i)$.

As derivadas parciais $\Psi_{\lambda}(j\omega_i)$ em relação a α_k^λ para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ e β_l para $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ resultam em:

$$\frac{\partial \Psi_{\lambda_r}}{\partial \alpha_k^{\lambda_s}} = \begin{cases} 0 & \text{se } r \neq s \\ -(j\omega_i)^{n-k} := -R_{n-k}(j\omega_i) & \text{se } r = s \end{cases}$$

$$e \frac{\partial \Psi_{\lambda}}{\partial \beta_l} = (j\omega_i)^{n-1} G_{\lambda}(j\omega_i) := R_{n-1} G_{\lambda}(j\omega_i), \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Substituindo as derivadas parciais acima em (7), realizando algumas manipulações algébricas e suprimindo o argumento $(j\omega_i)$, a fim de simplificar a notação, chega-se a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \alpha_k^{\lambda}} &= \sum_{i=1}^m 2Re(R_{n-k} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda}) + \\
&- R_{n-k} G_{\lambda}^* D^*(\underline{\beta})) \quad (8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial \beta_l} &= \sum_{i=1}^m 2Re(R_{n-1} \sum_{\lambda} [G_{\lambda} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda})] + \\
&- R_{n-1} D^*(\underline{\beta}) \sum_{\lambda} |G_{\lambda} G_{\lambda}^*|) \quad (9)
\end{aligned}$$

onde $Re(\cdot)$ representa a parte real do argumento.

De acordo com (6), uma condição necessária de otimalidade é ter $\partial J / \partial \alpha_k^{\lambda} = 0$ e $\partial J / \partial \beta_l = 0$. Assim, igualando (8) e (9) a zero:

$$\sum_{i=1}^m Re(R_{n-k} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda}) - R_{n-k} G_{\lambda}^* D^*(\underline{\beta})) = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^m Re(R_{n-1} \sum_{\lambda} [G_{\lambda} N^*(\underline{\alpha}^{\lambda})] + \\
- R_{n-1} D^*(\underline{\beta}) \Pi_{\lambda}) = 0 \quad (11)
\end{aligned}$$

onde $\Pi_{\lambda} = \Pi_{\lambda}(j\omega_i) = \sum_{\lambda} |G_{\lambda}(j\omega_i) G_{\lambda}^*(j\omega_i)|$.

Escolhida a ordem n para o denominador comum da MFT estimada, obtém-se um conjunto de equações para $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ em (10) e para $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ em (11). Estas equações podem ser

organizadas sob a forma de um sistema de equações lineares $\underline{Q}\underline{\theta} = \underline{Y}$, onde os termos independentes são aqueles correspondentes ao coeficiente $\beta_0 = 1$. A matriz dos coeficientes Q e o vetor independente \underline{Y} têm tratamento computacional mais fácil se analisados de maneira particionada. Suprimindo o argumento $(j\omega_i)$, genericamente, tem-se:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 & -Q_2^{11} \\ 0 & Q_1 & \dots & 0 & -Q_2^{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q_1 & -Q_2^{qp} \\ \hline Q_3^{11} & Q_3^{21} & \dots & Q_3^{qp} & -Q_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\alpha}^{11} \\ \underline{\alpha}^{21} \\ \vdots \\ \underline{\alpha}^{qp} \\ \underline{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_\alpha^{11} & \underline{Y}_\alpha^{21} & \dots & \underline{Y}_\alpha^{qp} & \underline{Y}_\beta \end{bmatrix}^T \quad (12)$$

A matriz dos coeficientes Q para o caso multivariável é quadrada de dimensão $(n+1)pq + n$. As submatrizes Q_1 , Q_2^λ e Q_3^λ e o vetor $\underline{Y}_\alpha^\lambda$ seguem as formas matemáticas descritas em^{[1], [23]} para os sistemas monovariáveis, sendo calculadas para cada canal $\lambda \in \Lambda$ do sistema, de acordo com:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^m Re \left(\begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_0 \end{bmatrix} [R_n^* \ R_{n-1}^* \ \dots \ R_0^*] \right)$$

$$Q_2^\lambda = \sum_{i=1}^m Re \left(\begin{bmatrix} R_n \\ R_{n-1} \\ \vdots \\ R_0 \end{bmatrix} [R_{n-1}^* \ R_{n-2}^* \ \dots \ R_0^*] G_\lambda \right)$$

$$Q_3^\lambda = \sum_{i=1}^m Re \left(\begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_0 \end{bmatrix} [R_n^* \ R_{n-1}^* \ \dots \ R_0^*] G_\lambda \right)$$

$$\underline{Y}_\alpha^\lambda = \sum_{i=1}^m Re \left(\begin{bmatrix} R_n R_n^* G_\lambda^* \\ R_{n-1} R_n^* G_\lambda^* \\ \vdots \\ R_0 R_n^* G_\lambda^* \end{bmatrix} \right)$$

Os termos Q_4 e \underline{Y}_β em (12) podem ser calculados por:

$$\underline{Y}_\beta = \sum_{i=1}^m Re \left(\begin{bmatrix} R_{n-1} R_n^* \Pi_\lambda \\ R_{n-2} R_n^* \Pi_\lambda \\ \vdots \\ R_0 R_n^* \Pi_\lambda \end{bmatrix} \right) \quad (13)$$

$$Q_4 = \sum_{i=1}^m Re(M)$$

$$\text{onde } M = \begin{bmatrix} R_{n-1} \\ R_{n-2} \\ \vdots \\ R_0 \end{bmatrix} [R_{n-1}^* \ R_{n-2}^* \ \dots \ R_0^*] \Pi_\lambda.$$

Exemplos de aplicação

A seguir, estão apresentados três exemplos acadêmicos onde o método proposto foi aplicado. Os modelos MIMO desses exemplos são conhecidos para efeito de comparação de resultados. A notação “canal y:u” utilizada nesta seção faz referência à combinação formada pela saída y e a entrada u de um sistema com p entradas e q saídas sob análise.

Turbogerador

Esse sistema contém duas entradas e duas saídas. O modelo linearizado utilizado possui seis estados e está reproduzido em^{[13], [23]}. Suas características principais são a estabilidade em malha aberta e um pico ressonante na frequência

$\omega = 6,35$ rad/s, com fator de amortecimento de apenas 0,055.

Os resultados obtidos pela aplicação da técnica proposta encontram-se resumidos na tabela 1. Para a identificação, foi utilizado um vetor de frequências com 100 valores no intervalo de 0,03 rad/s a 30 rad/s, considerando o

espaçamento logarítmico uniforme. Neste caso, o primeiro modelo estimado com custo satisfatório em relação ao modelo original foi $G_B^6(s)$. Os modelos com ordem $n \leq 5$ apresentaram custos de ajuste bastante elevados e, portanto, não são boas aproximações para o sistema considerado.

Tabela 1 – Custos obtidos (por canal e total) para o exemplo do turbogerador.

Ordem (n) de D(s)	Custo do canal (J_λ)				Custo total ($J_M = \sum J_\lambda$)
	1:1	2:1	1:2	2:2	
3	11,369	6,468	491,009	688,824	1197,671
4	2,474	3,999	175,405	161,126	343,005
5	2,969	8,088	150,526	143,307	304,891
6	$1,079 \cdot 10^{-11}$	$5,140 \cdot 10^{-10}$	$7,812 \cdot 10^{-9}$	$8,762 \cdot 10^{-9}$	$1,710 \cdot 10^{-8}$
7	$7,120 \cdot 10^{-10}$	$1,924 \cdot 10^{-9}$	$3,694 \cdot 10^{-8}$	$3,638 \cdot 10^{-8}$	$7,596 \cdot 10^{-8}$
8	$5,040 \cdot 10^{-10}$	$1,864 \cdot 10^{-9}$	$2,222 \cdot 10^{-8}$	$2,611 \cdot 10^{-8}$	$5,070 \cdot 10^{-8}$

Tabela 2 – Custos obtidos (por canal e total) para o exemplo do míssil ar-ar.

Ordem (n) de D(s)	Custo do canal (J_λ)		Custo total ($J_M = \sum J_\lambda$)
	1:1	2:1	
2	8,1467	30,5079	38,6545
3	0,7709	2,7901	3,5611
4	$2,4289 \times 10^{-11}$	$3,9113 \times 10^{-11}$	$6,3402 \times 10^{-11}$
5	$1,3199 \times 10^{-11}$	$2,2353 \times 10^{-11}$	$3,5553 \times 10^{-11}$
6	$1,6013 \times 10^{-10}$	$2,1719 \times 10^{-10}$	$3,7732 \times 10^{-10}$

Tabela 3 – Custos obtidos por canal e total para o exemplo da aeronave de combate.

Ordem (n) de D(s)	Custo do canal (J_λ)				Custo total ($J_M = \sum J_\lambda$)
	1:1	2:1	1:2	2:2	
3	46,981	161,804	64,181	113,029	385,997
4	20,395	60,773	14,223	40,777	136,169
5	$1,687 \cdot 10^{-9}$	$4,612 \cdot 10^{-9}$	$1,174 \cdot 10^{-9}$	$3,064 \cdot 10^{-9}$	$1,053 \cdot 10^{-8}$
6	$6,342 \cdot 10^{-9}$	$2,536 \cdot 10^{-8}$	$5,065 \cdot 10^{-9}$	$1,675 \cdot 10^{-8}$	$5,351 \cdot 10^{-8}$
7	$4,813 \cdot 10^{-9}$	$7,709 \cdot 10^{-9}$	$1,988 \cdot 10^{-9}$	$4,648 \cdot 10^{-9}$	$1,916 \cdot 10^{-8}$
8	$2,096 \cdot 10^{-9}$	$1,661 \cdot 10^{-8}$	$1,327 \cdot 10^{-9}$	$1,224 \cdot 10^{-8}$	$3,228 \cdot 10^{-8}$

Míssil ar-ar

O modelo não-linear do canal de elevação de um míssil ar-ar foi proposto por^{[15], [20]}, de onde podem ser extraídos os valores dos coeficientes numéricos. O sistema contém uma entrada e duas saídas e seu modelo de ordem 4 é reproduzido, resumidamente, em^[23]. A dinâmica modelada representa um míssil voando a uma altitude de 20.000 pés. É suposto verdadeiro o desacoplamento dos eixos de rumo (longitudinal) e de rolagem.

Os resultados obtidos encontram-se resumidos na tabela 2. O vetor de frequências utilizado contém 100 pontos com espaçamento logarítmico uniforme na faixa de 0,01 rad/s a 100 rad/s. De acordo com a precisão necessária, é possível utilizar um modelo de ordem menor que a do modelo original, com erro de ajuste satisfatório. Essa conclusão é possível observando-se os diagramas de resposta em frequência do modelo calculado para ordem 3, que, na faixa de frequências adotada, estão praticamente coincidentes com os correspondentes calculados a partir do modelo original.

Aeronave de combate

Para este exemplo, foi utilizado o modelo linearizado de uma aeronave de combate, sob determinadas condições de vôo, apresentado, por^[21] e reproduzido em^[23]. O vetor de estados consiste nas principais variáveis de corpo rígido do veículo: velocidade longitudinal, ângulo de ataque, taxa de arfagem e ângulo de atitude em

arfagem. O modelo final contém, além dos estados descritos, duas variáveis referentes à dinâmica de dois atuadores utilizados na aeronave, resultando num modelo de 6ª ordem. Define-se também o ângulo de trajetória como o ângulo do vetor velocidade em relação à horizontal.

Os resultados obtidos encontram-se resumidos na tabela 3. O vetor de frequências utilizado contém 100 pontos com espaçamento logarítmico uniforme na faixa de 0,01 rad/s a 100 rad/s. O algoritmo alcançou uma solução de ordem menor que a do modelo original, com erro de ajuste satisfatório.

Conclusões

Neste artigo foi apresentado um método analítico de identificação no domínio da frequência de modelos lineares, aplicável em sistemas dinâmicos multivariáveis. Este trabalho complementa o apresentado em^[1], no qual tratou-se mais diretamente de sistemas dinâmicos monovariáveis. Os modelos obtidos pela metodologia estão sob a forma de matriz função de transferência. Por construção, os polinômios característicos calculados dos vários canais do modelo são iguais. Isto reduz significativamente o número de parâmetros estimados, diminuindo o tempo de processamento computacional e facilitando o cálculo de realizações da matriz função de transferência com ordens provavelmente mínimas. As aplicações da metodologia proposta em três exemplos encontrados na literatura apresentaram bons resultados. 

Referências

- [1] Ades, R. e Silveira, B.P. (2006). Identificação de Sistemas por Ajuste da Resposta em Frequência utilizando Conjuntos Geradores Otimizados, XVI Congresso Brasileiro de Automática.
- [2] Ades, R. e Valle, R.C. (2005). Identificação de Sistemas no Domínio da Frequência por Conjuntos Pré-selecionados via Imposição de Pólos, VII SBAI, p. 727-732, Set 2005.
- [3] Aguirre, L.A. (2007). Introdução à Identificação de Sistemas, 3 ed., Editora UFMG, Belo Horizonte.

- [4] Akçay, H. e Heuberger, P. (2001) A Frequency-domain Iterative Identification Algorithm using General Orthonormal Basis Functions, *Automatica* (37), p.663-674.
- [5] Akçay, H., Islam, S.M. e Ninness, B. (1998) Identification of Power Transformer Models from Frequency Response Data: A Case Study, *Signal Processing* (68): p.307-315.
- [6] Bayard, D.S. (1994) High-Order Multivariable Transfer Function Curve Fitting: algorithms, sparse matrix methods and experimental results, *Automatica* (30): p.1439-1444.
- [7] Bazaara, S. e Shetty (1993) *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*, 2 ed, John Wiley and Sons.
- [8] Carvalho, M.R.L. (2000) *Controle PID de Plantas Identificadas via Parâmetros de Markov*, Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.
- [9] Friedman, J.H. e Khargonekar, P.P. (1995) Application in H_{∞} to Lightly Damped Systems: two case studies, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (3): p.279-289.
- [10] Gu, G., Khargonekar, P.P. e Li, Y. (1992) Robust Convergence of 2-Stage Nonlinear Algorithms for Identification in H_{∞} , *Systems and Control Letters* (18): p.253-263.
- [11] Helmicki, A.J., Jacobson, C.A. e Nett, C.N. (1991) Control Oriented System Identification: a worst-case/deterministic approach in H_{∞} , *IEEE Transactions on Automatic Control* (10): p.1163-1176.
- [12] Macedo, R.B.S. (2001) *Identificação de Sistemas usando Conjuntos Geradores Otimizados*, Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.
- [13] Maciejowski, J.M. (1989) *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley.
- [14] Medina, E.A., Irwin, R.D., Mitchell, J.R. e Bukley, A. (1994) MIMO System Identification using Frequency Response Data, *The Journal of the Astronautical Sciences* (1): p.113-129.
- [15] Nichols, R., Reichert, R. e Rugh, W. (1993) Gain Scheduling for H_{∞} Controllers: a flight control example, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* (2): p.69-79.
- [16] Ninness, B. (1996) Frequency Domain Estimation using Orthonormal Bases, *Proceedings of 13th IFAC World Congress*, San Francisco, USA.
- [17] Ninness, B. (1998) A Stochastic Approach to Linear Estimation in , *Automatica* (4): p.405-414.
- [18] Pintelon, R., Guillaume, P., Rolain, Y., Schoukens, J. e Van-Hamme, H. (1994) Parametric Identification of Transfer Functions in Frequency Domain, *Transaction on Automatic Control* (11): p.2245-2260.
- [19] Pintelon, R., Schoukens, J. e Vandersteen, G. (1997) Frequency Domain System Identification using Arbitrary Signals, *IEEE Transactions on Automatic Control* (12): p.1717-1720.
- [20] Reichert, R. (1992) Dynamic Scheduling of Modern-Robust-Control Autopilot Designs for Missiles, *IEEE Control Systems Magazine* (5): p.35-42.
- [21] Safonov, M., Laub, A. e Hartmann, G. (1981) Feedback Properties of Multivariable Systems: the Role and Use of the Return Difference Matrix, *IEEE Transactions on Automatic Control* (1): p.47-65.
- [22] Sanathanan, C.K. e Koerner, J. (1963) Transfer Function Synthesis as a Ratio of Two Complex Polynomials, *IEEE Transactions on Automatic Control* (8): p.56-58.
- [23] Silveira, B.P. (2006) *Identificação de Sistemas no Domínio da Frequência para Aplicação em Veículos Aéreos Não-Tripulados*, Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia.
- [24] Vidyasagar, M. (1985) *Control System Synthesis: a factorization approach*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- [26] Wulhnyek, S.P. e Ades, R. (2003) *Identificação de Sistemas no Domínio da Frequência utilizando Conjuntos Geradores Otimizados*, III SNCA, Salvador, Brasil, p.80-85.
- [27] Zhou, K. (1996) *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, New Jersey.