

Um auxílio na Identificação Paramétrica por Filtragem de Kalman

*Paulo César Pellanda**

*Geraldo Magela Pinheiro Gomes***

1. INTRODUÇÃO

A filtragem de Kalman é uma ferramenta útil na identificação paramétrica. A implementação é feita a partir do conhecimento de seqüências dos sinais de excitação e de saída do sistema a identificar. Contudo, uma pobre identificação pode resultar caso não seja escolhido um adequado conjunto de medidas [1]. Este trabalho tem por objetivo investigar um critério a ser imposto ao sinal de entrada para que se garanta uma efetiva identificação.

A estratégia visa utilizar a resposta a um ruído branco de um filtro linear como excitação do sistema a ser identificado. A idéia é ajustar o filtro de maneira a gerar um sinal que proporcione uma rápida convergência da matriz de covariância do erro de estimação paramétrica. Nessa hipótese a utilização do critério inverso ao

da síntese de controle robusto "Parameter Robust Control by Bayesian Identification" (PRCBI) [2,3,4,5,6] pode auxiliar no ajuste e melhorar a identificação de um sistema invariante.

2. IDENTIFICAÇÃO COMO UM PROBLEMA DE FILTRAGEM DE KALMAN [1]

Seja o seguinte sistema do tipo ARMA:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} \quad (2.1)$$

A partir do conhecimento, em tempo real ou não, do conjunto de entradas $\{u_k\}$ e das respectivas saídas $\{y_k\}$, é possível estimar os valores dos coeficientes a_i e b_i utilizando um filtro de Kalman.

* Cap OEM - MSc - Prof. IME

** Cel R/1 - Dr. - Prof. IME

Primeiramente considera-se que o sistema (2.1) está sujeito a ruídos do sensor de medidas e que a transição do vetor de parâmetros $\theta = [a_1 \dots a_n \ b_1 \dots b_m]^t$ está sujeita a perturbações aleatórias:

$$\begin{cases} \theta_{k+1}^{(i)} = \theta_k^{(i)} + w_k^{(i)} \\ y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} + v_k \end{cases} \quad (2.2)$$

onde $\{w_k^{(i)}\}$ e v_k são considerados processos gaussianos, brancos, de média nula e independentes. É considerada também a independência entre $\{w_k^{(i)}\}$ e $\{w_k^{(j)}\}$ para $i \neq j$.

Assim o modelo (2.2) pode ser reescrito na forma de estado, onde este passa a ser o vetor de parâmetros θ :

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = \underbrace{I_{(n+m) \times (n+m)}}_F \theta_k + w_k \\ y_k = \underbrace{[-y_{k-1} \ -y_{k-2} \ \dots \ -y_{k-n} \ u_{k-1} \ u_{k-2} \ \dots \ u_{k-m}]}_{H'} \theta_k + v_k \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $F = I$ é a matriz de transição de estados e H' a matriz de saída.

Para se aplicar a teoria de filtragem de Kalman ao modelo (2.3), quando o sistema (2.1) é invariante, a variância $Q_k = E[w_k w_k^t]$ é considerada nula e o valor da variância $R_k = E[v_k^2]$ é escolhido com base no que se conhece do sensor de medida. Assume-se também que θ_0 é um vetor de variáveis aleatórias de valor estimado $\hat{\theta}_{0/0}$.

A Figura 1 ilustra o algoritmo do Filtro de Kalman a ser utilizado, onde $\hat{x} = \hat{\theta}$ e $F_k = I$.

$$\Sigma_{k/k-1} = F_{k-1} \Sigma_{k-1/k-1} F_{k-1}' + Q_{k-1} \quad (1)$$

$$K_k = \Sigma_{k/k-1} H_k' [H_k' \Sigma_{k/k-1} H_k + R_k]^{-1} \quad (2)$$

$$\Sigma_{k/k} = [I - K_k H_k'] \Sigma_{k/k-1} \quad (3)$$

$$\hat{x}_{k/k-1} = F_{k-1} \hat{x}_{k-1/k-1} \quad (4)$$

$$\hat{x}_{k/k} = \hat{x}_{k/k-1} + K_k [z_k - H_k' \hat{x}_{k/k-1}] \quad (5)$$

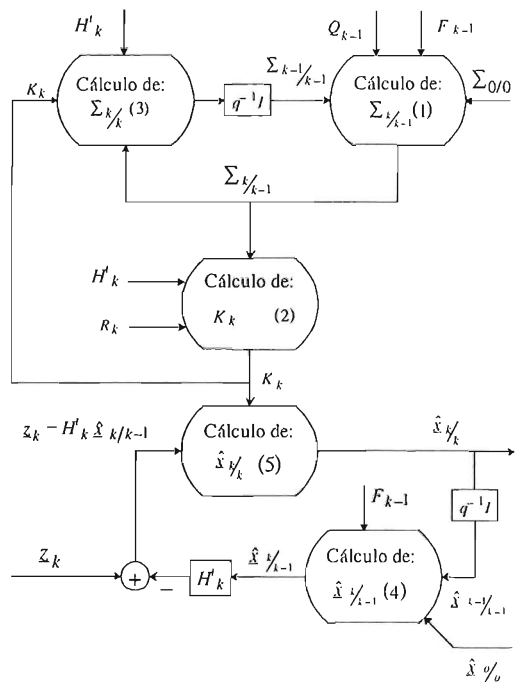


Figura 1 – Fluxograma do Filtro de Kalman discreto.

3. A SÍNTESE PRCBI [2, 3]

A síntese PRCBI é uma síntese de controle robusto paramétrico, desenvolvida recentemente (1991), que explora o fato de que uma má qualidade de identificação paramétrica é geralmente associada a um sistema que apresenta excelentes qualidades de estabilidade.

O método PRCBI utiliza a mesma estrutura de controle a malha fechada do método Linear Quadrático Gaussiano (LQG), mostrada na Figura 2. O sistema $S(\underline{\theta})$ é representado pelas matrizes A , B e C , do modelo de estado, dependentes de um vetor paramétrico $\underline{\theta}$, incógnito ou variável. O filtro de Kalman é ajustado sobre o valor nominal, conhecido *a priori*, $\underline{\theta}_0$. O regulador é caracterizado por uma matriz de ganhos K_c .

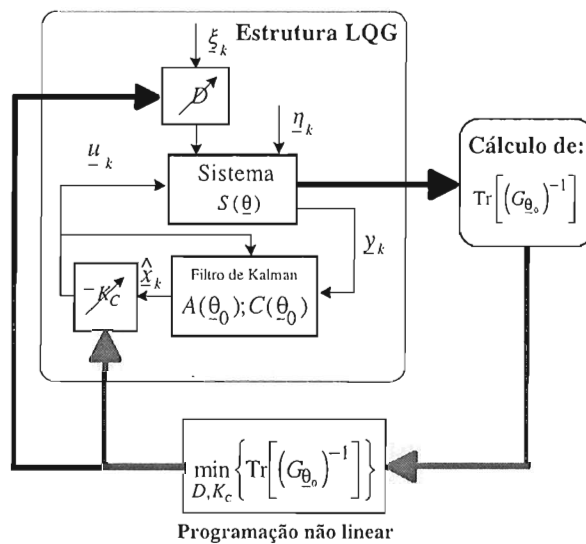


Figura 2 – A síntese PRCBI.

O objetivo fundamental da síntese PRCBI consiste na pesquisa das matrizes de ganho do filtro de Kalman e do regulador (K_c) que conduzem à pior qualidade de identificação paramétrica em malha fechada. Assim a dinâmica de malha fechada, para os ganhos calculados, será robusta em relação à variação paramétrica. A medida de robustez é, portanto, influenciada pelas matrizes D (matriz de entrada do ruído ξ da planta), Q (matriz de covariância do ruído da planta), que é função de D , e R (matriz de covariância do ruído η das medidas), que determinam o ganho do filtro de Kalman, e pela matriz K_c dos ganhos de realimentação dos estados estimados.

Pode-se mostrar que a qualidade da identificação Bayesiana está associada à matriz de covariância do erro de estimação paramétrica (G_{θ_0}). Uma medida desta qualidade, que constitui o critério de robustez J_r , pode ser obtida pelo traço da inversa desta

matriz: $J_r^A T_r (G_{\theta_0}^{-1})$. O critério de robustez da síntese PRCBI consiste da minimização deste traço. Os elementos diagonais da matriz são obtidos a partir da solução, para cada elemento, de três equações matriciais auxiliares da forma $X = TXW + Y$, onde as matrizes T , W , e Y dependem de ganhos e de covariâncias calculadas por filtros de Kalman em regime assintótico [2].

O robustecimento em relação ao conjunto de parâmetros incertos deve conduzir a um controlador capaz de sustentar a estabilidade do sistema para uma larga faixa de variação paramétrica em torno dos valores considerados nominais.

4. A SÍNTESE PRCBI COMO AUXÍLIO NA IDENTIFICAÇÃO POR FILTRAGEM DE KALMAN

Desde que exista um conjunto de parâmetros para os quais se deseja calcular o índice que mede a qualidade de identificação Bayesiana, a síntese PRCBI pode ser aplicada a sistemas de malha aberta. No entanto, para que se possa conduzir o processo de otimização, o modelo deve conter, além de tais parâmetros, elementos passíveis de ajuste, de maneira a constituírem as variáveis de projeto, das quais depende a função custo.

Essa idéia pode ser ilustrada pela Figura 2. Supondo a inexistência da realimentação (observador e regulador) resta como variável de projeto a matriz D , que determina os zeros do sistema. Em suma, ao minimizar J_r , a síntese procura alocar os zeros de malha aberta de forma a prejudicar a identificação Bayesiana de θ .

Como a identificação Bayesiana é feita por um banco de filtros de Kalman em paralelo, ajustados em vários pontos do espaço paramétrico discretizado⁽¹⁾ [1, 2], existe uma ligação entre a qualidade da identificação Bayesiana e a qualidade da identificação feita pela filtragem de Kalman, apresentada na Seção 2. Então, a utilização da síntese PRCBI de forma inversa, ou seja, maximizando o custo J_r , pode contribuir para uma efetiva identificação pelo método descrito naquela Seção.

Contudo, nem sempre se pode interferir ou fazer ajustes num sistema do tipo “caixa preta”, do qual se conhece o modelo nominal. Por isso vamos considerar um filtro linear em cascata com o sistema desconhecido e submeter o filtro aos ajustes.

A síntese PRCBI admite a hipótese do conhecimento *a priori* do modelo nominal de um sistema que foi modificado de maneira desconhecida por um motivo qualquer. Consideremos que esse sistema seja o (2.1) com $m = n = 2$, descrito agora pela sua função de transferência discreta:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} \quad (4.1)$$

¹ ANDERSON & MOORE. Optimal Filtering. (Ver Capítulo 10 – Parameter Identification and Adaptive Estimation, em particular Fig. 10.1-1)

Ou, na forma de estado:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = [0 \quad 1] x_k \end{cases} \quad (4.2)$$

onde o vetor de parâmetros desconhecidos seja $\theta = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]'$.

Seja o filtro linear discreto $H(z) = Z(z)/\xi(z)$ de mesma dimensão do sistema (4.1), representado pela sua forma de estado:

$$\begin{cases} x_{k+1}^f = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 \\ 1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} x_k^f + \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \xi_k \\ z_k = [0 \quad 1] x_k^f \end{cases} \quad (4.2)$$

Considerando os elementos em cascata, a entrada do sistema é igual à saída do filtro, ou seja, $u_k = z_k$. Assim o sistema global pode ser escrito numa única forma de estado aumentada com entrada ξ_k e saída y_k :

$$\begin{cases} x_{k+1}^a = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\alpha_2 & 0 & 0 \\ 1 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & -a_2 \\ 0 & b_1 & 1 & -a_1 \end{bmatrix}}_{A(\theta)} x_k^a + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_D \xi_k \\ y_k = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] x_k^a + v_k \end{cases} \quad (4.3)$$

onde ξ_k e v_k são processos gaussianos, brancos, de média nula e independentes, sendo ξ_k suposto gerado em laboratório a fim de excitar o sistema global.

O sistema (4.3) enquadra-se naquele da Figura 2 sem levar em conta a realimentação. As variáveis de projeto consideradas para aplicação da síntese PRCBI são α_1 , α_2 , β_1 e β_2 e algumas estão presentes também na matriz A .

5. RESULTADOS

Foram considerados os seguintes valores para aplicação da síntese PRCBI ao sistema (4.3):

- vetor paramétrico nominal: $\theta_0 = [-1.5 \ 0.54 \ 4 \ -1]'$;
- variância do ruído de medidas: $R = 0.001$;
- variância do ruído de entrada: $Q = 10$.

Como resultado da minimização do custo PRCBI inverso ($1/J_p$), obteve-se dois conjuntos de valores de variáveis de projeto: um correspondente ao custo mínimo e outro a um não-mínimo. Procedeu-se dessa forma a fim de facilitar a comparação da qualidade de identificação proveniente da excitação de dois conjuntos de entradas do sistema. As variáveis projetadas pelo valor mínimo (melhor qualidade) correspondem a $\alpha_1 = 0.8070$, $\alpha_2 = 0.9998$, $\beta_1 = -464.0540$ e $\beta_2 = -464.0541$. O filtro digital implementado com estes valores e excitado com um ruído branco gerou a saída $z_k^{(1)}$ da Figura 3. As variáveis projetadas para um custo inverso não-mínimo (qualidade deteriorada) correspondem a $\alpha_1 = 0.5585$, $\alpha_2 = 0.9991$, $\beta_1 = 0.9395$ e $\beta_2 = -0.9395$. A saída $z_k^{(2)}$ da Figura 3 foi gerada pelo filtro excitado com o mesmo ruído e com estes novos valores projetados.

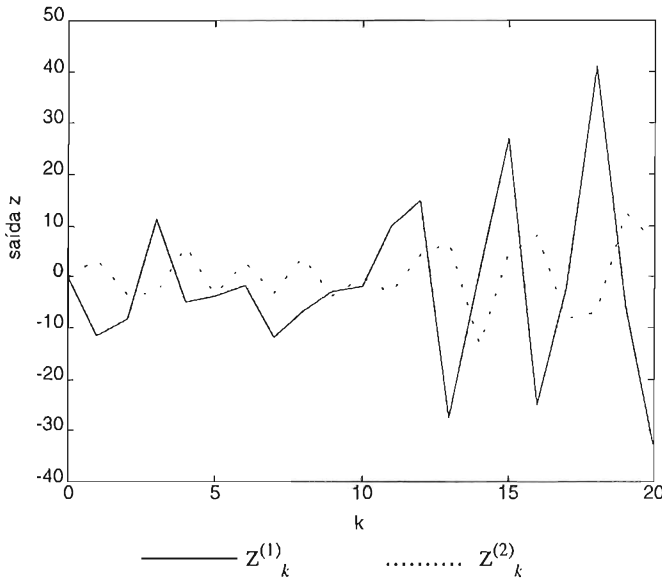


Figura 3 – Saídas do filtro linear.

As saídas do filtro foram utilizadas como entradas do sistema (4.2) perturbado como a seguir:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 p \\ 1 & -a_1/p \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} b_2/p \\ b_1 p \end{bmatrix} z_k \\ y_k = [0 \ 1] x_k \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $p = 1.2$ determina um vetor paramétrico perturbado $\theta = [-1.25 \ 0.648 \ 4.8 \ -0.8333]'$ a ser identificado. As saídas $y_k^{(i)}$ relativas às entradas $z_k^{(i)}$ são mostradas na Figura 4.

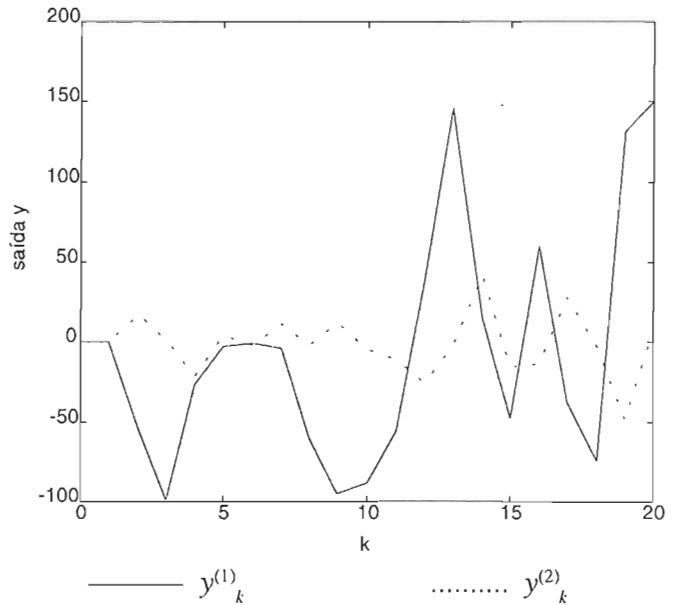


Figura 4 – Saídas do sistema.

A Figura 5 mostra o resultado da estimação paramétrica para as duas hipóteses discutidas e também para um ruído branco na entrada do sistema. Os estimadores convergiram para os seguintes valores em $k = 20$:

- $z_k^{(1)}$: $\hat{\theta} = [-1.2500 \ 0.6480 \ 4.8000 \ -0.8333]'$
- $z_k^{(2)}$: $\hat{\theta} = [-1.1136 \ 0.5724 \ 4.5408 \ -0.4721]'$
- ruído branco: $\hat{\theta} = [-1.2140 \ 0.6219 \ 4.5134 \ -0.6259]'$

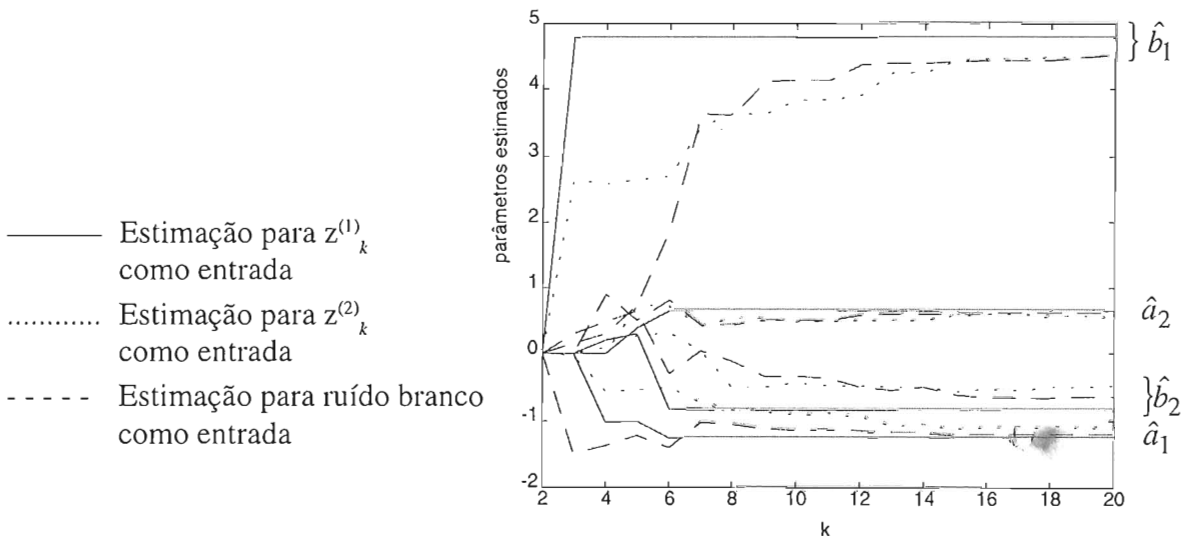


Figura 5 – Estimação dos parâmetros pelo filtro de Kalman.

A estimação com ruído branco na entrada do sistema teve melhor convergência em relação a $z_k^{(2)}$. Porém, a entrada $z_k^{(1)}$ proporcionou excelente estimação, como era esperado.

As Figuras 6 e 7 confirmam o resultado anterior, embora para os primeiros passos (até $k = 7$) exista uma discrepância entre os valores teóricos (Figura 6) e os valores práticos (Figura 7) relativos a $z_k^{(2)}$ e ruído branco.

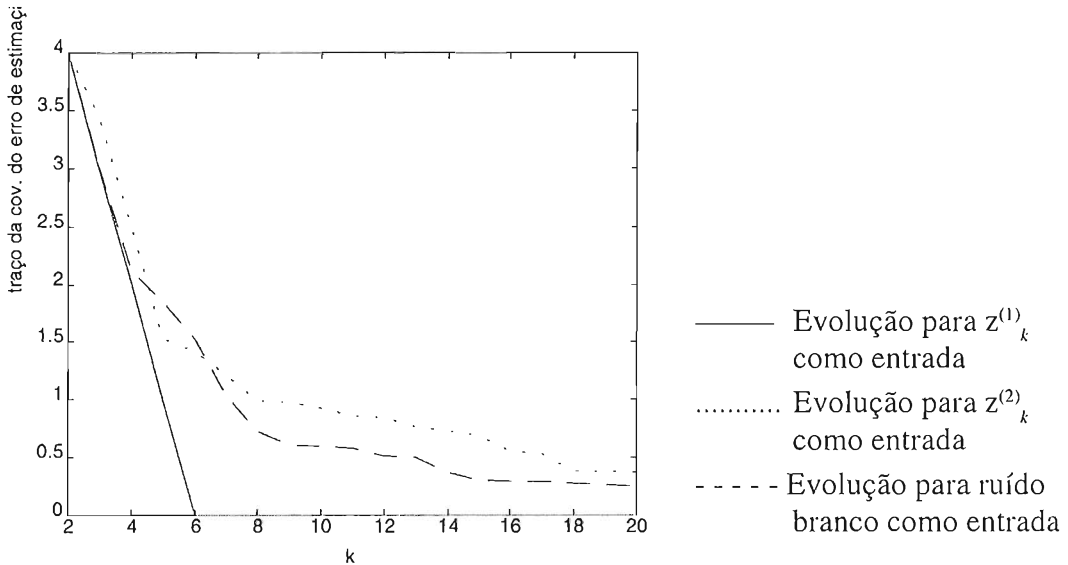


Figura 6 – Evolução do traço da matriz de covariância do erro de estimação.

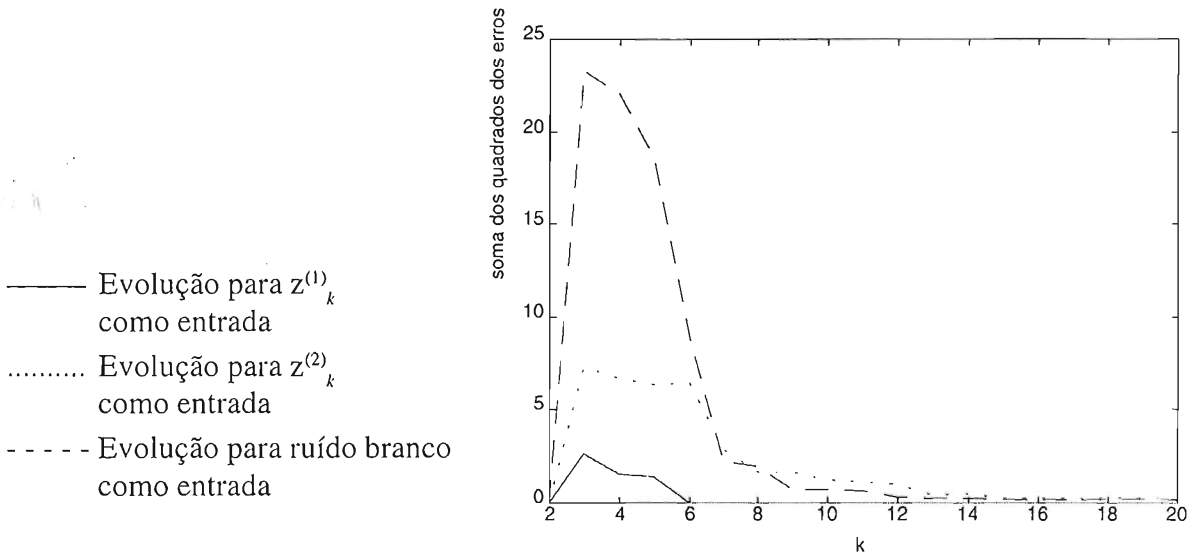


Figura 7 – Evolução da soma dos quadrados dos erros de estimação.

A Figura 8 ilustra uma pobre identificação procedida pela excitação do sistema através de um degrau aplicado em $k = 0$. Observa-se que houve uma boa excitação dos pólos do sistema, pela convergência de \hat{a}_1 e \hat{a}_2 , porém o zero (\hat{b}_1 e \hat{b}_2) não foi identificado.

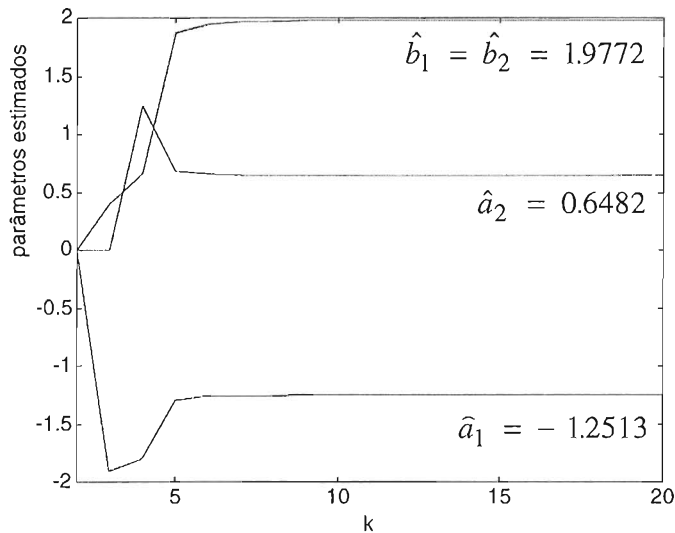


Figura 8 – Estimação dos parâmetros com excitação em degrau ($u = 50$).

6. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

É possível calcular, através da síntese PRCBI, uma seqüência de entradas que facilita a identificação por filtragem de Kalman de um sistema perturbado, do qual se conhece *a priori* o modelo nominal.

No exemplo utilizado verificou-se que a função custo PRCBI e o traço de $\sum_{k/k}$ estão relacionados. Esta relação deve ser investigada com maior profundidade pois a dificuldade em se computar o traço de $\sum_{k/k}$ é menor para sistemas com poucas entradas e saídas e muitos parâmetros. Caso venha a se concluir sobre a equivalência dos dois índices, a síntese PRCBI poderá ser simplificada, e o novo índice poderá servir para o cálculo de controladores parametricamente robustos.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Anderson, B.D.O. and J.B. Moore (1979). *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, New Jersey.
2. G. M. P. Gomes. *Synthese d'une Commande Robuste Liée à la Qualité de l'Identification Bayésienne*, Ph.D. Dissertation, ENSAE, Toulouse, France, 1991.

3. M. Gauvrit and G. M. P. Gomes. "Parameter Robust Control Design Based on Parametric Identification Quality", *Proceedings of the 9th International Conference in Analysis and Optimization of Systems*, Antibes, France, pp. 912-923, 1990.
4. M. Gauvrit and G. M. P. Gomes. "Links Between Parameter Robust Control Design and Bayesian Parameter Identification", *European Control Conference- ECC/91, Grenoble-Alpes- Congres*, France, 1991.
5. P.C. Pellanda, J.V.M. de Souza, G.M.P. Gomes e A.L. Veiga Filho. "Síntese PRCBI Generalizada Para Aplicação na Pilotagem Automática de Mísseis", *Revista Militar de Ciência e Tecnologia*, Vol. XIII, nº 4, pp. 5-15, out/dez/96.
6. F. L. Tito, G. N. Taranto and P. C. Pellanda. "A Hybrid Robust Power System Control Design Combining System Identification and Genetic Algorithms", *paper FM14-3 to be presented at the 1998 IEEE Automatic Control Conference-ACC*, Philadelphia, PA, USA, June 1998.