

Modelagem AR aplicada a Receptores MLSE adaptativos

Juraci F. Galdino*

Ernesto L. Pinto*

RESUMO

Neste artigo aborda-se a escolha de modelos racionais do tipo autoregressivos (AR) para aplicações em receptores MLSE (*Maximum Likelihood Sequence Estimation*) adaptativos, os quais vêm sendo investigados objetivando-se futuras aplicações em sistemas de comunicações digitais móveis. Avalia-se, através de simulação computacional, a variância do erro de predição produzido pelo emprego de modelos AR de diferentes ordens na modelagem do canal, considerando-se formato de espectros *Doppler* e valores de taxas de amostragem típicos da aplicação em questão. Os resultados obtidos indicam que o modelo AR(1) produz elevados erros de predição, justificando o desempenho pobre de receptores nele baseados. Por outro lado, verifica-se que o modelo AR(2) se mostra o mais adequado. A avaliação de desempenho de receptores MLSE adaptativos baseados no modelo AR(2) é considerada num artigo complementar a este.

1. INTRODUÇÃO

Técnicas de recepção MLSE adaptativas têm despertado o interesse de renomados pesquisadores e sido objeto de inúmeras pesquisas, principalmente em aplicações que envolvem canais

caracterizados pelo efeito de desvanecimento por múltiplos percursos, como por exemplo em comunicação de dados sem fio e telefonia móvel [1-5]. Nestes casos, devido à natureza variável e aleatória dos canais, os receptores MLSE adaptativos proporcionam melhor desempenho do que as técnicas de recepção convencionais, as quais admitem modelo de canal invariante [6].

* Instituto Militar de Engenharia - DE/3

Apesar da melhoria de desempenho propiciada pelos receptores MLSE adaptativos em relação as técnicas de recepção convencionais, resultados de simulações desses esquemas evidenciam uma certa ineficiência nas aplicações em que a **resposta impulsional** (RI) do canal varia rapidamente com o tempo (desvanecimento rápido) [7]. Nesses casos, os sistemas de transmissão possuem baixa vazão, devido ao periódico uso de seqüências de treinamento para obter novas estimativas de canal durante o processo de recepção. Além disso, o desempenho, expresso em termos da **probabilidade de erro de bit** (PEB) em função da razão E_b/N_0 , são caracterizadas pelo efeito de probabilidade de erro irreduzível. Recentes pesquisas realizadas nessa área procuram otimizar o processo de recepção para contornar estes problemas [8-9].

Nos esquemas de recepção MLSE adaptativos a RI do canal é estimada e atualizada por **algoritmos de filtragem adaptativa** (AFA). Para tal, os AFA utilizam como entrada os símbolos detectados. Em função desta dependência, uma pequena seqüência de símbolos errados pode determinar uma perda irrecuperável no acompanhamento do canal, o que, por sua vez, provoca o surgimento de novos erros. Uma das estratégias para amenizar este problema seria modelar estatisticamente os erros ocorridos no detetor para otimizar o esquema de filtragem. No entanto, tal abordagem é extremamente complicada face à dependência desses erros com as estimativas passadas da própria RI do canal. Outra alternativa é utilizar um AFA robusto a esses efeitos.

Uma das possibilidades para se obter um esquema AFA robusto é incorporar no esquema de filtragem alguma informação a priori sobre o canal, como o seu modelo estatístico. Esta estratégia pode ser adotada em algoritmos baseados no **filtro de Kalman** (FK) [13], ao passo que não podem ser utilizadas em esquemas de filtragem convencionais: **Least Mean Square** (LMS) e **Recursive Least Squares** (RLS) [13].

Esta estratégia para melhoria de desempenho da recepção MLSE adaptativa diante de desvanecimento rápido tem sido investigada em diversos artigos publicados recentemente [1-2]. Nestes trabalhos o canal de comunicação é modelado por processos autoregressivos de primeira ordem (AR(1)). Pelos resultados apresentados em [7], obtidos a partir de um estudo comparativo entre esquemas de recepção MLSE adaptativos que empregam filtragem LMS e FK, indicam que a melhoria de desempenho proporcionada pelo primeiro em relação ao segundo não justifica o aumento da complexidade do receptor. Além disso, em certos casos, observa-se até um melhor desempenho de esquemas baseados no algoritmo de filtragem LMS.

Neste artigo, procura-se avaliar este comportamento aparentemente inesperado com maior profundidade. Avalia-se o ajuste do modelo estatístico AR de ordem p (AR(p)) em relação aos propostos para modelar o efeito físico de canais com desvanecimento de múltiplos percursos. Em particular, avalia-se o ajuste do modelo AR(1), o qual tem sido freqüentemente adotado para modelar o canal de comunicação. Os resultados obtidos, podem ser interpretados como quantificadores da perda de informação resultante da adoção de um dado modelo nos esquemas de recepção de seqüências de símbolos que envolvem FK.

O restante deste artigo está organizado da seguinte maneira: o modelo do canal WSS-US é apresentado de forma sumária na Seção II, a discussão acerca do modelo estatístico do

canal em tempo discreto e os resultados das simulações são apresentados na Seção III e, finalmente, na Seção IV são apresentadas as conclusões do trabalho.

2. O MODELO DE CANAL WSS-US

O canal caracterizado pelo efeito de múltiplos percursos é modelado como um sistema linear variante no tempo, caracterizado por um forma de onda complexa $h(t; \tau)$, que representa a resposta em banda básica no instante t a um impulso aplicado em $t-\tau$.

A grande maioria dos trabalhos que propõem técnicas para simular a RI do canal procuram reproduzir as propriedades estatísticas sintetizadas no modelo WSS-US (*Wide Sense Stationary – Uncorrelated Scattering*) [10].

De acordo com o modelo WSS-US, para um determinado valor de retardo τ_0 , $h(t; \tau_0)$ representa um processo estocástico estacionário em sentido amplo. Além disso, admite-se que os processos $h(t; \tau_i)$ e $h(t; \tau_j)$ são descorrelacionados para $i \neq j$. Essas duas suposições justificam o nome dado ao modelo.

Adotando-se o modelo WSS-US, o canal pode ser caracterizado por uma função bidimensional conhecida como função espalhamento, que permite avaliar os espalhamentos realizados pelo canal nos domínios do tempo e da frequência. As “marginais” dessa função, obtidas por integração em todo o domínio de cada uma das variáveis são denominadas perfil de intensidade de atraso e perfil de espalhamento *Doppler*. Os perfis assim obtidos, possibilitam a extração de parâmetros que quantificam os efeitos provocados pelo canal. Em particular, do perfil de intensidade de atrasos obtém-se a banda de coerência e do perfil de espalhamento *Doppler* obtém-se o tempo de coerência do canal.

A banda de coerência do canal representa a faixa de frequência onde o desvanecimento é bem correlacionado. Se o sistema de transmissão ocupa uma faixa de frequência igual ou inferior a banda de coerência do canal o desvanecimento é dito plano [6], do contrário é classificado como seletivo em frequência. Já o tempo de coerência do canal representa o intervalo de tempo no qual a RI do canal se mantém bem correlacionada. Este parâmetro, em conjunto com a taxa de transmissão adotada, permite classificar o desvanecimento como rápido ou lento.

Vários modelos matemáticos têm sido sugeridos para gerar canais com RI que possuem as características estatísticas do modelo WSS-US, em especial para um dado valor de retardo τ (modelo faixa larga). Dentre eles, destaca-se a abordagem de *Aulin* [11], na qual supõe-se que o campo incidente na antena do receptor é composto de uma grande quantidade de ondas tridimensionais polarizadas horizontalmente. Os ângulos de chegada e fases individuais dessas ondas são aleatórias e estatisticamente independentes entre si. A Figura 1 ilustra a geometria inerente a este modelo.

O modelo de *Aulin* ainda supõe que as fases das ondas incidentes possuem distribuição uniforme entre $[0, 2\pi)$. Esta suposição parece razoável para sistemas que operam a partir da faixa de frequência VHF, onde o comprimento de onda é pequeno para garantir que pequenas mudanças no caminho provoquem mudanças significativas nas fases das portadoras.

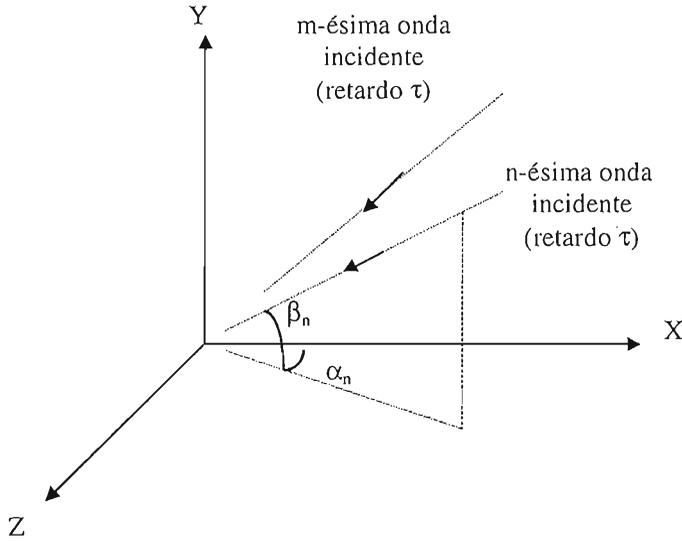


Figura 1 – Geometria inerente ao modelo de *Aulin*

A avaliação matemática deste modelo conduz as seguintes conclusões: a estatística de primeira ordem desses processos é caracterizada pelas funções densidades de probabilidade de Rayleigh e uniforme entre $[-\pi, \pi]$, as quais modelam respectivamente a amplitude e fase da RI do canal. Para se obter a função autocorrelação do processo, é necessário especificar as distribuições dos ângulos espaciais das ondas incidentes. Considerando-se que a propagação é restrita ao plano horizontal ($\beta_n = 0$, para todo n), e supondo α_n uniforme em $[0, 2\pi]$, é possível mostrar que a autocorrelação do campo incidente é dada por [11]:

$$R(\zeta) = \frac{E_0}{2} J_0(2\pi f_D \zeta), \tag{1}$$

onde $E_0/2$ representa a potência média associado ao valor de retardo considerado, $J_0(\cdot)$ denota a função de Bessel de ordem zero e f_D o máximo desvio *Doppler* dado por:

$$f_D = \frac{v}{\lambda_p}, \tag{2}$$

onde v representa a velocidade do móvel e a constante λ_p representa o comprimento de onda da portadora.

O espectro correspondente a esta função autocorrelação, conhecido como espectro “clássico” ou de “*Jakes*” [12], é dado por:

$$S(f) = \frac{E_0}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_D}\right)^2}} \left[u(f + f_D) - u(f - f_D) \right], \quad (3)$$

onde $u(\cdot)$ representa a função degrau unitário. A Figura 2 apresenta esse espectro para $f_D=30\text{Hz}$.

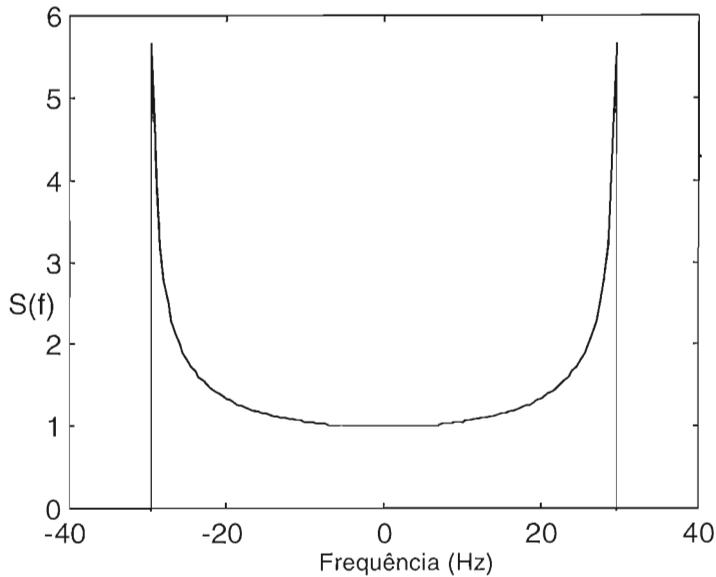


Figura 2 – Espectro *Doppler* “Clássico” com $f_D=30\text{Hz}$.

Considerando modelos de propagação tridimensionais, outros espectros como os apresentados em [11-12] podem ser obtidos, de acordo com a distribuição da variável aleatória β .

3. MODELAGEM ESTATÍSTICA DO CANAL EM TEMPO DISCRETO

Como mencionado anteriormente, um dos aspectos fundamentais para melhorar o desempenho dos esquemas de recepção MLSE adaptativos consiste no emprego de algoritmos de filtragem adaptativa robusta. Tal abordagem é particularmente importante em aplicações que envolvem canais caracterizados pelo efeito de desvanecimento rápido, como por exemplo em comunicações móveis. Essa estratégia poderia ser implementada pela utilização do FK se o espectro do canal fosse racional. Infelizmente, na aplicação em questão os modelos de espectros propostos são não racionais [11-12]. Dessa forma, para usufruir do potencial da FK

da melhor forma possível, é importante encontrar um modelo estatístico racional que melhor se ajuste ao modelo do espectro Doppler adotado.

O critério de otimização aqui adotado para avaliar o ajuste entre o modelo estatístico racional e o modelo físico do canal é a variância do erro de predição [13]. O erro de predição, $e[k]$, é obtido de acordo com o esquema mostrado na Figura 3.

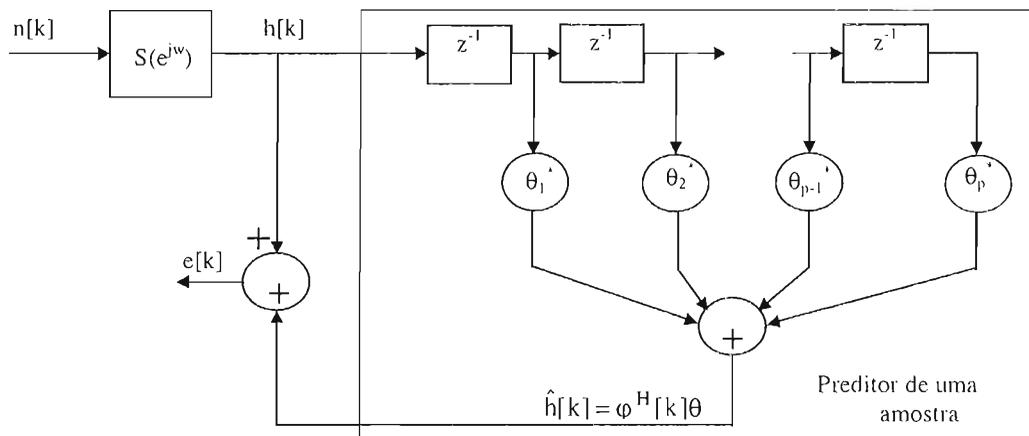


Figura 3 – Erro de predição para um preditor AR de uma amostra.

No esquema apresentado na Figura 3 $n[k]$ representa amostras de um processo gaussiano complexo de média nula e variância unitária. $S(e^{j\omega})$ representa a transformada de *Fourier* da resposta ao impulso de um filtro linear e invariante ao deslocamento, denominado filtro de forma, cuja função é formatar o espectro de $n[k]$. $h[k]$ representa a evolução no tempo de um dos coeficientes da RI do canal e, por fim, $e[k]$ representa o erro de predição dado por:

$$e[k] = h[k] - \hat{h}[k], \tag{4}$$

onde $\hat{h}[k]$ é a estimativa de $h[k]$ dada por:

$$\hat{h}[k] = \varphi^H[k]\theta, \tag{5}$$

sendo θ um vetor que contém os coeficientes do filtro transversal e $\varphi[k]$ o vetor de regressão no instante k , que é dado por:

$$\varphi[k] = (h[k-1], \dots, h[k-p])^T, \tag{6}$$

onde p é a ordem do preditor AR. O vetor θ foi obtido a partir da Equação de *Yule-Walker* [13], a fim de minizar o **erro médio quadrático** (EMQ) de predição.

Inicialmente considerou-se como formato do espectro do canal o de *Jakes* e, foram obtidas as variâncias dos erros de predição para $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ e $f_D \in \{10, 50, 100, 200\text{Hz}\}$. Utilizou-se uma taxa de amostragem igual 24,3Kbaud. Os resultados obtidos são mostrados na Tabela 1.

Como consequência das elevadas taxas de amostragens adotadas na recepção em relação a largura de banda do espectro Doppler, a taxa de variação da RI do canal é muito pequena com respeito ao intervalo de símbolo. Isto significa que o processo $h[k]$ é altamente correlacionado, dando origem a matrizes de autocorrelação mal condicionadas e, como a equação de *Yule-Walker* não garante a solução de fase mínima, os filtros obtidos podem ser instáveis.

Os valores do EMQ ótimos são apresentados na terceira coluna da Tabela 1 e os valores ausentes representam situações onde os filtros são instáveis. A solução aqui adotada para evitar este problema foi refletir os pólos para dentro do círculo unitário, operação essa realizada no plano Z. Este procedimento garante a estabilidade do filtro e a forma da Densidade Espectral de Potência do processo, mas produz um erro de fase, o que compromete a otimização

Tabela 1: Erro de predição para modelo AR(p) em função da f_D com espectro clássico

f_D	Ordem	θ_0	σ_0^2	θ	σ_p^2
10	1	1	$3.18e^{-6}$	1	$3.18e^{-6}$
	2	$[2 - 1]^T$	$2.42e^{-11}$	$[2 - 1]^T$	$2.42e^{-11}$
	3	$[3.0003 - 3.0006 \ 1.0003]^T$	–	$[2.942 - 2.8859 \ 0.9438]^T$	$2.39e^{-5}$
	4	$[1.8265 \ 0.6306 - 2.428 \ 1.159]^T$	–	$[1.29 \ 0.196 - 0.9535 \ 0.362]^T$	$4.04e^{-3}$
50	1	1	$7.97e^{-5}$	1	$7.97e^{-5}$
	2	$[2 - 1]^T$	$3.175e^{-9}$	$[2 - 1]^T$	$3.175e^{-9}$
	3	$[3 - 3 \ 1]^T$	–	$[2.996 - 2.992 \ 0.996]^T$	$2.47e^{-7}$
	4	$[3.9653 - 5.898 \ 3.894 - 0.967]^T$	–	$[3.2253 - 3.954 \ 2.183 - 0.458]^T$	$4e^{-3}$
100	1	0.9998	$3.19e^{-4}$	0.9998	$3.19e^{-4}$
	2	$[1.9996 - 0.9999]^T$	$5.08e^{-8}$	$[1.9996 - 0.9999]^T$	$5.08e^{-8}$
	3	$[2.9994 - 2.9994 \ 1]^T$	–	$[2.9226 - 2.849 \ 0.926]^T$	$5.45e^{-5}$
	4	$[3.999 - 5.998 \ 3.998 - 0.9997]^T$	–	$[3.85 - 5.562 \ 3.574 \ 0.86]^T$	$2.97e^{-5}$
200	1	0.9994	$1.27e^{-3}$	0.9994	$1.27e^{-3}$
	2	$[1.9984 - 0.9997]^T$	$8.126e^{-7}$	$[1.9984 - 0.9997]^T$	$8.126e^{-7}$
	3	$[2.998 - 2.998 \ 0.9997]^T$	$6.657e^{-10}$	$[2.998 - 2.998 \ 0.9997]^T$	$6.657e^{-10}$
	4	$[3.997 - 5.994 \ 3.996 - 0.9977]^T$	–	$[3.9502 - 5.854 \ 3.858 - 0.9538]^T$	$1.233e^{-7}$

estatística. Os erros de predição obtidos utilizando-se os filtros com polos refletidos são apresentados na quarta coluna da Tabela 1. Os elevados valores de erro predição assim obtidos podem ser justificados pela perda de otimização estatística.

À medida que a largura de banda do espectro *Doppler* aumenta, a matriz de autocorrelação tende a se tornar bem condicionada, e modelos AR de ordens maiores podem ser obtidos. Contudo, para a faixa de valores de frequência Doppler considerada nas simulações, que representa a faixa de interesse prático em sistemas de comunicações celulares, o mínimo valor da variância do erro de predição sempre ocorreu para o modelo AR(2), exceto para o caso de $f_D=200\text{Hz}$, situação onde o modelo AR(3) se mostrou mais eficiente.

Outras formas de espectro *Doppler* foram avaliadas. Em particular, foram considerados os formatos de espectro discutidos em [12] e o espectro com formato retangular. Os resultados com o espectro retangular são apresentados Tabela 2 e são bem parecidos com os apresentados na Tabela 1. Comportamento semelhante foi verificado nos resultados de simulações relativos aos outros formatos de espectro.

Tabela 2: Erro de predição para modelo AR(p) em função da f_D para espectro retangular

f_D	Ordem	θ_0	σ_0^2	θ	σ_p^2
10	1	1	$2.12e^{-6}$	1	$2.12e^{-6}$
	2	$[2 -1]^T$	$1.63e^{-11}$	$[2 -1]^T$	$1.63e^{-11}$
	3	$[2.9997 - 2.9995 \ 0.9997]^T$	–	$[2.907 -2.8183 \ 0.9112]^T$	$9.41e^{-5}$
	4	$[2.0872 \ 0.088 -1.8125 \ 1.012]^T$	–	$[0.94 \ 0.502 -0.9973 \ 0.339]^T$	0.2173
50	1	1	$5.31e^{-5}$	1	$5.31e^{-5}$
	2	$[1.9999 -1]^T$	$2.257e^{-9}$	$[1.999 -1]^T$	$2.257e^{-9}$
	3	$[2.9999 -2.9999 \ 1]^T$	–	$[2.992 -2.9984 \ 0.9993]^T$	$7.9e^{-7}$
	4	$[4.01 -6.03 \ 4.03 -1.011]^T$	–	$[3.5653 -4.798 \ 2.88 -0.65]^T$	$1.5e^{-3}$
100	1	0.9999	$2.12e^{-4}$	0.9999	$2.12e^{-4}$
	2	$[1.9997 -0.9999]^T$	$3.61e^{-8}$	$[1.9997 -0.9999]^T$	$3.61e^{-8}$
	3	$[2.9995 -2.9995 \ 0.9999]^T$	$7.241e^{-9}$	$[2.9995 -2.995 \ 0.9999]^T$	$7.241e^{-9}$
	4	$[3.9987-5.996 \ 3.997 - 0.9992]^T$	–	$[3.7665 -5.329 \ 3.354 \ 0.7926]^T$	$1.65e^{-4}$
200	1	0.9996	$8.498e^{-4}$	0.9996	$8.498e^{-4}$
	2	$[1.9988 -0.9997]^T$	$5.779e^{-7}$	$[1.9988 -0.9997]^T$	$5.779e^{-7}$
	3	$[2.9981 -2.9978 \ 0.9997]^T$	$6.0887e^{-10}$	$[2.9981 -2.9978 \ 0.9997]^T$	$6.0887e^{-10}$
	4	$[3.997 -5.994 \ 3.997 - 0.9997]^T$	–	$[3.957 -5.8735 \ 3.876 - 0.9598]^T$	$4.e^{-7}$

Mediante o exposto acima, observamos que a forma do espectro tem pouca influência nos resultados obtidos, especialmente no que tange a determinação da ordem do modelo AR. Tal comportamento, aparentemente contraditório, é justificado pelo fato de que, na aplicação em questão, a largura de banda do espectro *Doppler* é muito menor do que a taxa de amostragem do receptor. Desta forma, o efeito do formato do espectro se torna pouco relevante.

A insensibilidade da ordem do modelo AR quanto a forma do espectro é um resultado importante, em decorrência da inexistência de um modelo de espectro que contemple a diversidade de cenários de recepção em sistemas de comunicações celulares que operam em ambientes urbanos.

É bem conhecido o fato de que o modelo ARMA possui maior flexibilidade do que o AR, no que se refere a geração de espectro com formas arbitrárias. Contudo, existem poucos e complexos algoritmos para estimação dos seus parâmetros [14]. Além disso, em decorrência dos baixos erros de predição produzidos pelo modelo AR(2) e, principalmente, devido à pouca importância da forma de espectro adotada e à exigência de simplicidade computacional, não são aqui considerados os modelos ARMA e MA, sendo o AR(2) escolhido como o modelo de regressão mais adequado para representar a evolução no tempo dos coeficientes da RI de canais móveis, caracterizados pelo efeito de desvanecimento de múltiplos percursos.

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho, avaliou-se a aproximação de espectros não racionais, comumente empregados como modelos de ambiente de comunicação móvel, por espectros racionais adequados à utilização em algoritmos de filtragem adaptativos baseados em filtragem de *Kalman*. Tal avaliação é de extrema importância para a implementação de eficientes esquemas de recepção de seqüências de símbolos, principalmente em aplicações que envolvem canais caracterizados pelo efeito de desvanecimento rápido.

O trabalho centrou-se na obtenção, mediante simulação computacional, da variância do EMQ de predição, entre os modelos AR(p) e os modelos não racionais que são empregados na modelagem do canal físico. Os resultados obtidos são os seguintes:

- o modelo AR(1) produz erro de predição elevado;
- o modelo AR(2) possibilita uma vertiginosa queda do erro de predição, da ordem de 10^4 vezes, em relação ao erro obtido com modelo AR(1);
- a adoção de modelos AR de ordem superior a dois provocou quase sempre o aumento no erro de predição, devido à reflexão dos pólos do filtro, para conferir-lhe estabilidade, comprometendo a otimização estatística;
- os resultados obtidos mostraram-se pouco sensíveis a forma do espectro *Doppler* adotado.

Verifica-se que o modelo AR(1) representa uma pobre caracterização do canal de comunicação. Isso pode justificar o baixo desempenho de esquemas de recepção MLSE

baseados em filtragem de Kalman que adotam tal modelo de canal. Além disso, os resultados sugerem que o modelo AR(2) é o mais adequado para a modelagem de canal visando a aplicação em receptores MLSE adaptativos. Em um trabalho complementar a este avalia-se a melhoria proporcionada pela utilização deste modelo em um esquema de recepção MLSE baseado em filtragem de Kalman.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Rollins, M. E.; Simmons, S. J., "Simplified Per-Survivor Kalman Processing in Fast Frequency-Selective Fading Channels", *IEEE Transactions on Communications*, 1997, May, Vol. 45, No. 5, pp. 544-553.
2. Dai, Q.; Shwedyk, E., "Detection of Bandlimited Signals Over Frequency Selective Rayleigh Fading Channels", *IEEE Transactions on Communications*, 1994, Feb., Vol. 42, No. 2/3/4, pp. 941-950.
3. Raheli, R.; Polydoros, A.; Tzou, C., "Pre-Survivor Processing: A General Approach MLSE in Uncertain Environments", *IEEE Transactions on Communications*, 1995, Feb., Vol. 43, No. 2/3/4, pp. 354-364.
4. Chugg, K. M.; Polydoros, A., "MLSE for Unknown Channel - Part I: Optimality Considerations", *IEEE Transactions on Communications*, 1996, Jul., Vol. 44, No. 7, 836-846.
5. Chugg, K. M.; Polydoros, A., "MLSE for Unknown Channel - Part II: Tracking Performance", *IEEE Transactions on Communications*, 1996, Aug., Vol. 44, No. 8, pp. 949-958.
6. Proakis, J. G. *Digital Communications*. McGraw-Hill, Singapore, 1995.
7. Galdino, J. F. Recepção de Sequências de Símbolos em canais variantes com o tempo, Tese de Mestrado, IME, Dez., 1997.
8. Galdino, J. F. e Pinto E. L. "A Simulation Study of Adaptive Filtering Applied to MLSE-PSP Receivers, trabalho aceito para inclusão nos anais e apresentação no 1998 IEEE Military Communications, 18 a de 21 de Out. de 1998, Bedford, MA. USA.
9. Galdino, J. F. e Pinto E. L. "A New MLSE-PSP Scheme Over Fast Frequency-Selective Fading Channels, trabalho aceito para inclusão nos anais e apresentação no 1998 IEEE International Symposium on Information Theory and its Applications, cidade do México, México, 14-16 de Out. de 1998.
10. Stein, S. "Fading Channel Issues in System Engineering", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 1987, Feb., vol. SAC-5, No. 2, pp. 68-89.
11. Parsons, J. D., *The mobile radio propagation channel*, J. D. Parsons, 1992.
12. Jakes, Willian C., Jr.; *Microwave Mobile Comunciations*, Wiley, 1969.
13. Haykin, Simon. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, USA, 1991.
14. MARPLE. S. L. Jr., *Digital Spectral Analysis*, Prentice Hall, 1987