

SOBRE A CONECTIVIDADE ALGÉBRICA E A INSERÇÃO DE VÉRTICES PENDENTES EM ÁRVORES DE TIPO I

Stanley Rodrigues, Claudia Marcela Justel
Seção de Engenharia Sistemas e Computação, Instituto Militar de Engenharia
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
stanleyy@gmail.com

RESUMO

Este trabalho propõe uma abordagem do problema de adição de vértices pendentes em uma família de árvores, sob a condição de que a conectividade algébrica desta árvore não se altere.

Para isso foram realizados experimentos de alteração nas estruturas de árvores de Tipo I, para tentar encontrar o limite de vértices pendentes que podem ser inseridos nessas árvores, sem alterar a conectividade algébrica. Para encontrar esse limite, também é proposto um algoritmo utilizando conceitos da teoria que relacionam a conectividade algébrica de árvores de Tipo I aos autovalores de matrizes quadradas de números não-negativos.

Palavras-chave: Teoria espectral de grafos, conectividade algébrica, árvores de Tipo I.

ABSTRACT

This paper proposes an approach to the problem of adding pendant vertices in a family of trees, under the condition that the algebraic connectivity of this tree does not change.

Experiments were performed for this change in the structures of Type I trees, to try to find the limit of pedant vertices that can be inserted in these trees, without changing the algebraic connectivity. To find this limit, it is also proposed an algorithm using concepts from the theory that relate the algebraic connectivity of trees Type I with the eigenvalues of a square matrix of nonnegative numbers

Keywords: Spectral Graph Theory, Algebraic Connectivity, Type I Trees

INTRODUÇÃO

Na área de problemas de Teoria Espectral de Grafos, a conectividade algébrica é um invariante bastante estudado, uma vez que por meio dele é possível avaliar o quão conexo é um grafo. Por ser uma medida mais sensível que os conhecidos parâmetros de conectividade de vértices e arestas, muito enfoque é dado em algoritmos que possam otimizar a conectividade algébrica quando se altera a estrutura de um grafo (Abreu, 2007).

As primeiras definições e resultados a respeito da conectividade algébrica de um grafo foram propostas por Fiedler, que provou que um grafo desconexo tem a conectividade algébrica nula (Fiedler, 1973). Em um trabalho posterior, o estudo passou a abranger também a influência dos autovetores correspondentes a nos vértices do grafo, mais precisamente para o caso de árvores, e acabou por apresentar os critérios que permitem a classificação dessas em árvores de *Tipo I* e *Tipo II*.

Nosso trabalho envolve a alteração da estrutura, por inserção de vértices pendentes, das árvores de Tipo I. Desse modo daremos atenção aos conceitos a respeito desse grafo em particular.

Este trabalho tem como objetivo estudar o comportamento da conectividade algébrica quando se altera a estrutura de uma família particular de árvores de Tipo I. Para isso, serão apresentados nas seções seguintes as descrições de experimentos nos quais busca-se determinar uma família de árvores em que a adição de um vértice pendente (grau um) não cause alteração na sua conectividade algébrica. O trabalho também apresenta um algoritmo proposto para encontrar os limites da inserção de vértices pendentes nessas famílias de árvores, de acordo com parâmetros fornecidos a respeito da estrutura da árvore antes da alteração.

TRABALHOS RELACIONADOS

O trabalho de (Grone & Merris, 1987) foi o primeiro a abordar a adição de vértices em uma árvore observando sua conectividade algébrica, e provando que para uma árvore de Tipo I, formada por um caminho com número ímpar de vértices, é possível inserir vértices pendentes no vértice característico sem alterar a conectividade algébrica. Em (Mosk-Aoyama, 2008) é provado que o problema do aumento máximo da conectividade algébrica é NP-Completo. Mais recentemente, em (De Oliveira, 2012) é proposta uma heurística baseada na excentricidade de vértices para obter maior crescimento da conectividade algébrica de um grafo na inserção de uma aresta.

Em (Kirkland, 2010) são estabelecidos para um grafo G , do qual é retirado um vértice v , os limites da diferença absoluta e relativa entre as conectividades algébricas de G e $G - v$.

No trabalho de (Lee, 2012) são observados casos de inserção de vértices sem alterar a conectividade algébrica de uma família de árvores. Em (Albuquerque, 2012) são analisadas determinadas famílias de grafos dos quais se remove um vértice de grau d .

No entanto nesses dois últimos trabalhos não é utilizada técnica de algoritmo para verificar os limites de inserção de vértices pendentes, sem alteração da conectividade algébrica, utilizando conceitos de raio espectral de matrizes não negativas.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA E SOLUÇÃO PROPOSTA

A conectividade algébrica foi inicialmente estudada por Fiedler, que em 1973 definiu os primeiros conceitos e provou a relação dessa medida, que pode ser representada pelo segundo menor autovalor da matriz Laplaciana de um grafo. Para um grafo onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas pode-se calcular para esse grafo a matriz Laplaciana $L(G) = D(G) - A(G)$ tal que, $D(G)$ é a matriz diagonal dos graus dos vértices e $A(G)$ é a matriz de adjacência dada por

$$A(G) = A[i, j], a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i \text{ e } j \text{ são vértices adjacentes} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A matriz $L(G)$ é simétrica, portanto existem n autovalores reais correspondentes. Além disso, há uma base ortogonal do espaço formado por autovetores da matriz $L(G)$. Dentre os autovalores de $L(G)$ o segundo menor deles, $\lambda_2 = a(G)$, corresponde à conectividade algébrica e seu autovetor associado é chamado *vetor de Fiedler*. A Figura 1: Grafo $G(V, E)$ de seis vértices e sua matriz Laplaciana mostra um grafo G e para ele a matriz Laplaciana correspondente.

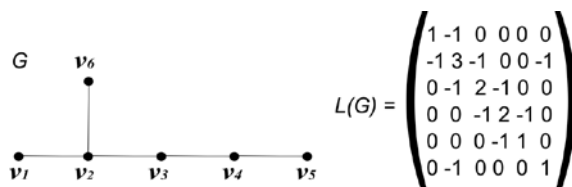


Figura 1: Grafo G de seis vértices e sua matriz Laplaciana

No trabalho de (Fiedler, 1973) foi provado que sempre que um grafo é conexo, temos $\lambda_2 > 0$ além de vários outros conceitos definindo a conectividade algébrica para diferentes tipos de grafos.

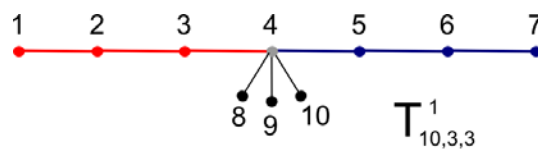
Em (Fiedler, 1975) são encontrados resultados sobre grafos e a conectividade algébrica relacionada agora ao conjunto de seus autovetores correspondente, ou vetor de Fiedler, denotado $\xi(G)$. Este trabalho também estudou de maneira mais particular as árvores, que são grafos conexos e sem ciclos, abrindo caminho para classificação desses grafos de acordo com os valores do autovetor $y = \xi(G)$ associado à conectividade algébrica. Como os valores desse vetor y podem ser associados a cada um dos vértices de uma árvore, diz-se que se dentre os componentes, $y_i, 1 \leq i \leq n$, onde n é o número de vértices da árvore, do vetor há algum $y_i = 0$ então a árvore T é árvore de Tipo I, caso contrário é chamada árvores de Tipo II.

As árvores de Tipo I e Tipo II diferenciam-se também pelos chamados *vértices característicos*, que no caso das árvores de Tipo I é o único vértice do grafo cujo valor do vetor de Fiedler associado é zero e é adjacente a vértices em que esse valor é diferente de zero. Já nas árvores de Tipo II todos os valores de y_i são diferentes

de zero, os vértices característicos para essas árvores são dois, e estes vértices p e q são os únicos adjacentes que respeitam a condição $y_p > 0$ e $y_q < 0$.

Em (Grone & Merris, 1987) encontram-se resultados a respeito da inserção de vértices em árvores de Tipo I sem que a conectividade algébrica seja alterada, além disso, o trabalho de (Kirkland et al., 1996) mostra como podemos calcular a conectividade algébrica de árvores de Tipo I em função de matrizes de números positivos. Estas matrizes, conhecidas na literatura como *matrizes bottleneck*, são definidas como a inversa de uma submatriz principal da matriz Laplaciana $L(T)$ de uma árvore T , obtida eliminando-se a k -ésima linha e coluna referente a um vértice k dessa árvore. A entrada (i,j) dessa matriz é igual ao número de arestas de T que estão em ambos os caminhos do vértice i até o vértice k , como do vértice j até o vértice k .

A Figura 2 mostra uma árvore de Tipo I formada por um caminho principal e vértices pendentes ligados ao vértice característico. Para essa árvore é calculada a matriz bottleneck, e as cores dos ramos dessa árvore estão no blocos diagonal correspondente na matriz.



$$L_4^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 2: Árvore de Tipo I e sua matriz bottleneck

Kirkland, Neumann & Shader também provaram que o maior autovalor (raio espectral), $\rho(L_k^{-1})$, da matriz bottleneck L_k^{-1} é igual ao raio espectral de um ou mais blocos diagonais da matriz, sendo chamado *valor de Perron*. Os ramos correspondentes aos blocos com raio espectral igual ao valor de Perron serão chamados *ramos de Perron*.

Estes mesmos autores também provaram uma propriedade a respeito da conectividade algébrica de uma árvore de Tipo I, em relação ao seu valor de Perron, e que é importante para o entendimento dos experimentos demonstrados neste trabalho.

O Teorema 2 de (Kirkland et al., 1996) diz que, para uma árvore $T(V,E)$, cujos vértices são $v_i \in V$, $1 \leq i \leq n$, será uma árvore de Tipo I, com vértice característico, se e somente se existem dois ou mais ramos de Perron de T em v_{k+1} . Além disso, nesse caso, a conectividade algébrica da árvore será $a(T) = \frac{1}{\rho(L_{k+1}^{-1})}$.

A partir das informações fornecidas pelos trabalhos anteriormente citados, e motivado pelas evidências sobre adição de vértices em árvores de Tipo I apresentadas em (Grone & Merris, 1987), formulamos a pergunta que representa o problema explorado neste trabalho.

Pergunta 1: Qual o número máximo de vértices pendentes que podem ser adicionados a uma árvore de Tipo I, sem alterar a conectividade algébrica dessa árvore?

Para tentar responder a essa pergunta, foram realizados experimentos em árvores de Tipo I, visando encontrar famílias de árvores que permitam a inserção de vértices pendentes, não alterando a conectividade algébrica. A metodologia e os resultados desses experimentos são apresentados na seção a seguir.

EXPERIMENTOS E RESULTADOS

Nesta seção, estão descritos os experimentos realizados com árvores de Tipo I, nas quais se observou o comportamento da conectividade algébrica e de seus autovetores quando inserimos nessas árvores vértices pendentes (de grau um).

Motivando-se nos resultados apresentados em (Grone & Merris, 1987), que observaram a inserção de um vértice pendente, em uma determinada família de árvores, sem que isso alterasse sua conectividade algébrica, foi elaborada a metodologia de experimentos utilizados neste trabalho.

Nos experimentos desta seção foi utilizado inicialmente a ferramenta gratuita *NewGraph* (Stevanovic et al., 2003) que permite desenhar grafos e deles obter os elementos algébricos necessários para a pesquisa (matrizes, autovalores e autovetores).

O passo básico de cada experimento é a alteração da estrutura dessas árvores, adicionando a elas novos vértices pendentes, observando se há a alteração da conectividade algébrica. As árvores testadas, no entanto, devem respeitar alguns critérios de formação. Os experimentos têm como estrutura inicial a árvore chamada .

Definição: Seja P_{2k+1} o caminho adjacente ao vértices e diâmetro par igual a $2k > 2$.

Em (Rodrigues, 2013) é provado que P_{2k+1} é uma árvore de Tipo I. Em (Grone & Merris, 1987) está descrito um caso de inserção de vértices pendentes para essa família de árvores, sem alteração da conectividade algébrica, quando se insere uma folha sempre adjacente ao vértice central v_{k+1} .

Já para os experimentos realizados neste trabalho, são estudadas árvores formadas pela inserção de sub-árvores com mais de um vértice em gerando uma nova família de árvores denominada $T_{n,k,p}^s$.

Definição: A árvore denominada $T_{n,k,p}^s$, com $p \geq 1$, $s \geq 3$ e $k \geq 2$, e é formada pelo caminho P_{2k+p} em que o vértice central, v_{k+1} do caminho é identificado com uma extremidade do caminho P_1 e uma folha da estrela $K_{1,p+1}^{\dots}$ é identificada com a outra extremidade do caminho P_s .

Experimentos em árvores $T_{n,k,p}^s$

Para tentar responder à Pergunta 1 foram inicialmente realizados testes com a árvore denominada $T_{n,k,p}^s$ que possui $n = 2k + p + 1$ vértices, com $T_{n,k,p}^s - v_{k+1} = P_k \cup K_{1,p}$

Para esta árvore foram adicionados o máximo de vértices p^* , para um determinado valor de k , sem que a conectividade algébrica da árvore se alterasse.

A Figura 3 apresenta um exemplo básico da árvore $T_{n,k,p}^s$, para $k = 5$ e $p = 1$, onde serão inseridos vértices pendentes, como o marcado em vermelho na figura. Para esse caso, o máximo de vértices inseridos não alterando a conectividade algébrica é $p^* = 10$.

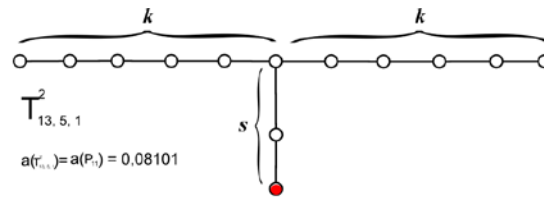


Figura 3 Exemplo de árvore $T_{n,k,p}^s$, com $k = 5$, na qual são inseridos vértices pendentes

Foram testados então os limites p^* de vértices pendentes inseridos, para as árvores obtidas variando o valor de $5 \leq k \leq 13$ e $k = 20$. Os valores obtidos evidenciam que o crescimento do comprimento do subgrafo P_{2k+1} , favorece o crescimento do número máximo de vértices p^* que podem ser inseridos, mantendo a conectividade algébrica. A Tabela 1 apresenta os valores de $a(T_{n,k,p}^s)$ para as árvores $T_{n,k,p}^s$ testadas e a conectividade algébrica de cada uma delas.

Tabela 1 Relação entre k e p , tais que $(P_{2k+1}) = (T_{n,k,p}^s) \forall p \leq p^*, n = 2k + 2 + p$

k	p^*	$a(T_{n,k,p}^s) = a(T_{n,k,p^*}^s) = a(P_{2k+1}) \forall p, 1 \leq p \leq p^*$
5	10	0,08101
6	15	0,05812
7	20	0,0437
8	27	0,03405
9	34	0,02728
10	42	0,02234
11	51	0,01863
12	61	0,01577
13	72	0,01352
20	169	0,00587

Experimentos sobre o máximo número de vértices inseridos na árvore $T_{n,k,p}^s$

Com o mesmo intuito descrito na subseção anterior, os testes seguintes buscam encontrar relação entre os limites p^* de vértices pendentes inseridos e o valor de s , o comprimento do ramo em que os novos vértices são inseridos. Nesse caso, além de variar o valor de k na árvore testada, o valor de s é alterado dentro do limite $3 \leq s \leq k$ e verifica-se o limite p^* para cada caso.

A Figura 4 apresenta o caso de teste para a árvore $T_{n,k,p}^s$, com $k = 5$, e $3 \leq s \leq 5$. Os testes para esse caso também verificam as árvores com $5 \leq k \leq 13$ e $k = 20$, mas dessa vez também variando o valor de s , tal que $3 \leq s \leq k$.

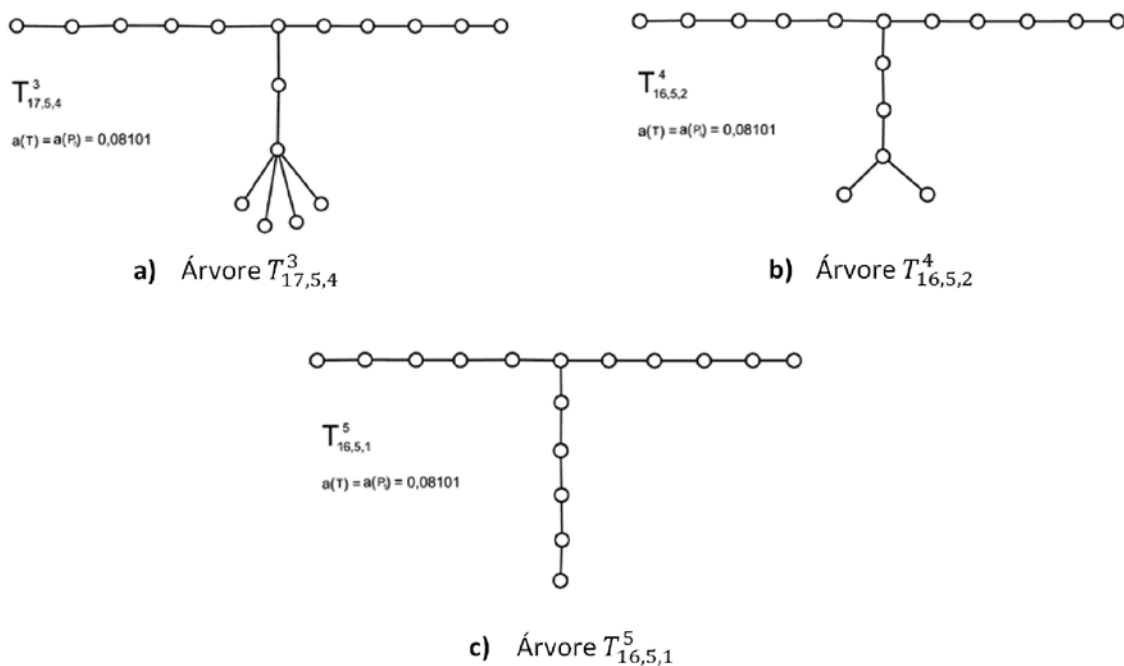


Figura 4 Exemplo de árvores de Tipo I, $T_{n,k,p}^s$ verificadas nos testes com $k - 5 \leq 3 \leq s \leq 5$.

Esse caso também evidencia a influência do valor k de no número máximo de vértices pendentes que podem ser inseridos (quanto maior o valor de k maior o limite p^*). Em contraponto, para um valor fixo k , o aumento do valor de torna mais difícil a inserção de vértices pendentes no extremo do ramo, mantendo a condição $a(P_{2k+1}) = a(T_{n,k,p}^2)$, como é possível identificar na Figura 4.

Outro caso de inserção de vértices pendentes em árvores $T_{n,k,p}^s$

Como visto anteriormente, para uma árvore de Tipo I teremos no mínimo dois chamados ramos de Perron no vértice central v_{k+1} , o que para o caso de árvores $T_{n,k,p}^s$ são os ramos do subgrafo P_{2k+1} . O ramo que recebe os vértices pendentes, não é ramo de Perron.

Nos experimentos deste caso, procurou-se identificar a possibilidade de inserção de ao menos mais um vértice pendente, além do máximo p^* de vértices pendentes já inseridos na ponta do ramo. Porém, os novos vértices devem estar ligados a outros vértices não-folha do ramo gerando a árvore denominada $T_{n,k,p}^s + v^*$. Um exemplo está representado na Figura 5, a árvore $T_{n,k,p}^s + v^*$ com $k = 9, s = 6$ e em que o vértice é inserido no penúltimo vértice não-folha do ramo, e é mantida a condição .

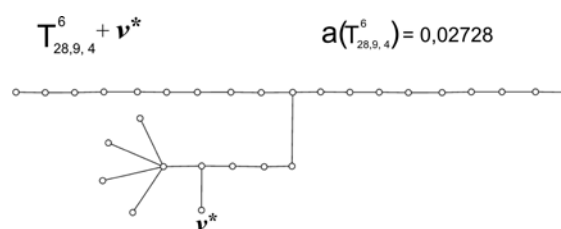


Figura 5 Árvore denominada com.

No experimento realizado utilizando todas as árvores, com e, e, com as árvores já tendo atingido o máximo de vértices pendentes na ponta do ramo, foi possível inserir um novo vértice em outra posição mantendo a conectividade algébrica.

Experimentos sobre Múltiplos Ramos Inseridos na Árvore

Outros experimentos também permitiram verificar propriedades dessas árvores, no que se referem ao número máximo p^* de vértices pendentes que podem ser adicionados sem alterar a conectividade algébrica quando mais de um ramo ligado ao vértice central v_{k+1} recebe vértices pendentes, desde que mantidas as estruturas dos dois ramos de Perron que formam a sub-árvore P_{2k+1} .

Assim sendo, vários ramos de diferentes comprimentos, desde que $s \leq k$, podem ser ligados ao vértice v_{k+1} , formando a árvore denominada $T_{n,k,p^1 \dots p^l}^{s^1 \dots s^l}$, onde l é o número de ramos da árvore em v_{k+1} . Então teremos cada ramo que não seja ramo de Perron com o limite p^* de vértices pendentes igual ao observado quando apenas um desses ramos estava presente na árvore de Tipo I (casos das três subseções anteriores).

Na Figura 6 está representada uma árvore $T_{n,k,p^1 \dots p^l}^{s^1 \dots s^l}$, com $k = 5$ e que conta com três ramos que não são de Perron tendo comprimentos $s = 2, s = 3, s = 4$ mantendo a condição $a(P_{2k+1}) \leq a(T_{n,k,p^1 \dots p^l}^{s^1 \dots s^l})$.

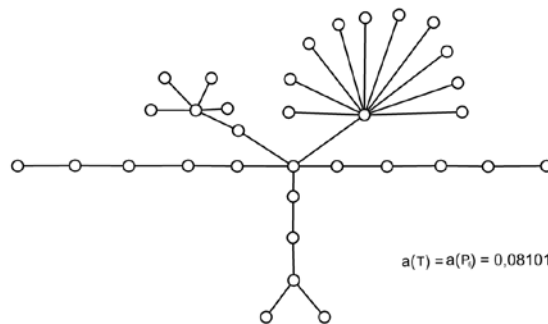


Figura 6 Árvore $T_{33,5,10,4,2}^{2,3,4}$ que mantém a condição $a(P_{2k+1}) \leq a(T_{n,k,p^1 \dots p^l}^{s^1 \dots s^l})$ com 5 ramos em v_{k+1}

Testes com o Algoritmo Proposto

Uma segunda metodologia experimental foi utilizada para quantidade e o tamanho das árvores de Tipo I testadas. Em lugar dos testes de adição manual de vértices pendentes utilizando o NewGraph, foi desenvolvido um algoritmo que tem como fundamento os teoremas de (Kirkland et al., 1996) sobre a relação da conectividade algébrica em árvores de Tipo I com o maior autovalor (raio espectral) da sua matriz bottleneck.

Sabendo que o raio espectral $\rho(L_{v_{k+1}}^{-1})$ da matriz bottleneck $L_{v_{k+1}}^{-1}$, no vértice v_{k+1} de uma árvore de Tipo I, é igual ao raio espectral dos blocos diagonais correspondentes aos ramos de Perron dessa árvore, a primeira parte do algoritmo consiste em um método para calcular a matriz bottleneck dos ramos que a compõem.

Como o objetivo é adicionar vértices na árvore que não alterem sua conectividade algébrica, isso significa verificar se o raio espectral $\rho(B_s)$ do ramo que está sendo alterado. Deve-se também ter em mente que o maior dentre os raios espectrais dos blocos diagonais que compõem $L_{v_{k+1}}^{-1}$ é que define a conectividade algébrica, pois temos que $a(T) = \frac{1}{\rho(L_{v_{k+1}}^{-1})}$.

Foi utilizado um método de cálculo da matriz bottleneck dos ramos que compõem a árvore $T_{n,k,p}^s$ a partir de parâmetros como o número de vértices e comprimento do ramo. Este método está descrito no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Geração da Matriz Bottleneck do Ramo que não é de Perron em

Entrada: n , // Número de vértices do ramo

s // Comprimento do Ramo

Saída: B // $B_s = B$ a matriz bottleneck do ramo que não é ramo de Perron

```

1  para  $i$  de 1 até  $n$  faça
2  para  $j$  de 1 até  $n$  faça
3  se  $i > j$  faça
4  se  $j < s$  faça
5       $B(i,j) = j$ 
6  senão
7       $B(i,j) = s - 1$ 
8  fim se
9  senão se  $i == j$  faça
10 se  $i \leq s$  faça
11      $B(i,j) = j$ 
12 senão se  $i > s$  faça
13      $B(i,j) = s$ 
14 fim se
15 senão se  $i < j$  faça
16 se  $i < s$  faça
17      $B(i,j) = i$ 
18 senão
19      $B(i,j) = s - 1$ 
20 fim se
21 fim se
22 fim para
23 fim para

```

O passo seguinte, descrito no Algoritmo 2, é utilizar as informações da matriz bottleneck calculada para verificar quando acontece uma alteração na conectividade algébrica. Enquanto $T_{n,k,p}^s$ tiver $p < p$ o raio espectral $p(B_s)$ do ramo que não é de Perron será sempre menor que o raio espectral $p(B_k)$ dos ramos de Perron, para satisfazer $a(P_{2k+1}) = a(T_{n,k,p}^s)$.

Sendo assim, o algoritmo calculará iterativamente uma nova matriz bottleneck a cada novo vértice pendente adicionado ao ramo que não é de Perron, e continuará fazendo enquanto $p(B_s) = p(B_k)$.

O Algoritmo 2 permite calcular o máximo p^* de vértices pendentes inseridos na extremidade do ramo que não é de Perron, para determinado valor de k e com o comprimento do ramo variando entre l_{min} e l_{max} . Em uma segunda parte do laço de repetição principal do algoritmo também é possível verificar o máximo p' de vér-

teses pendentes inseridos em outra posição l_2 do ramo, quando o valor de p^* já foi atingido.

Algoritmo 2: Cálculo de p^* e p' para a árvore $T_{n,q,p}^2$

Entrada: $k, l_{\min}, l_{\max}, l_2$

Saída: p^*, p'

- 1 Calcula $\rho(B_k) = \frac{l}{a(p_{2k+1})}$
 - 2 **para** $s = l_{\min}$ **até** l_{\max} **faça**
 - 3 Calcula $p(B_s)$ // para o ramo com l_{\max} vértices
 - 4 $p^* = 0$;
 - 5 **enquanto** $\rho(B_s) < \rho(B_k)$ **faça**
 - 6 Insera um vértice pendente no último vértice não folha do ramo passivo;
 - 7 Calcula novo $\rho(B_s)$
 - 8 $p^* = p^* + 1, p' = 0$
 - 9 **enquanto** $\rho(B_s) < \rho(B_k)$ **faça**
 - 10 Insera um vértice pendente no vértice l_2 do ramo passivo;
 - 11 Calcula novo $\rho(B_s)$
 - 12 $p' = p' + 1$
 - 13 **retornar** p^*, p'
 - 14 **fim para**
-

Os testes realizados utilizaram uma implementação desses algoritmos na plataforma *Octave 3.2* (Eaton, 1998), e foram testadas árvores $T_{n,k,p^*...p'}^s$ com $5 \leq k \leq 36$, $k = 40$ e $k = 50$, com $2 \leq s \leq k$, e com p' vértices pendentes adicionados na extremidade do ramo e *vértices pendentes neste mesmo ramo, porém no vértice adjacente a v_{k+1} .*

A Tabela 2 apresenta um trecho dos resultados, o de árvores com $k = 25$ e $2 \leq s \leq k$, e estes, assim como restante dos dados obtidos com o algoritmo, confirmam os valores de p^* já obtidos das árvores que puderam ser testadas manualmente com o NewGraph. As novas árvores de maior dimensão que não puderam ser testadas com a técnica manual e agora calculadas com auxílio do algoritmo também evidenciam o crescimento de p^* diretamente proporcional ao de k e inversamente proporcional ao crescimento de s .

Tabela 2 Dados de p^* e p' obtidos na execução do algoritmo para árvore $T_{n,k,p^*...p'}^s$ com e

k	s	p^*	p'
25	2	261	0
25	3	130	0
25	4	85	8
25	5	63	11
25	6	50	7
25	7	41	7
25	8	34	26
25	9	29	32
25	10	25	38
25	11	22	27

k	s	p^*	p^*
25	12	19	50
25	13	17	25
25	14	15	22
25	15	13	45
25	16	11	83
25	17	10	34
25	18	8	102
25	19	7	81
25	20	6	60
25	21	5	39
25	22	4	22
25	23	3	10
25	24	2	2
25	25	1	0

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho apresenta os resultados de experimentos realizados durante o estudo do comportamento da conectividade algébrica para uma família de árvores. As análises aqui apresentadas concentraram-se em árvores chamadas, segundo a classificação de (Fiedler, 1975). Os experimentos de Tipo I buscaram identificar famílias de árvores para as quais a inserção de vértices pendentes não altera a conectividade algébrica.

Os experimentos permitiram identificar uma família de árvores de Tipo I denominada $T_{n,k,p}^s$ para a qual a inserção de vértices pendentes, respeitando algumas condições, não altera a sua conectividade algébrica. Para árvores $T_{n,k,p}^s$, com $k \geq 2$ e $s \geq 2$, foi possível observar que o número de vértices pendentes inseridos, não alterando a conectividade algébrica, se relaciona com o número de vértices do subgrafo P_{2k+1} .

Os limites do número de vértices pendentes inseridos também foram verificados utilizando os algoritmos apresentados na seção anterior em testes com árvores $T_{n,k,p}^s$, com $5 \leq k \leq 36$, $k=40$ e $k=50$, e com $2 \leq s \leq k$ para cada k testado. O algoritmo permitiu ampliar a quantidade de árvores estudadas, além de permitir verificar árvores de maior dimensão, em testes que confirmaram a relação do número de vértices pendentes inseridos com o número de vértices do subgrafo P_{2k+1} .

Os resultados dos experimentos descritos neste trabalho permitiram formar uma base de dados que, associada aos conceitos teóricos da literatura disponível, direcionou a formalização teórica da família de árvores $T_{n,k,p}^s$ e a formulação de teoremas sobre os limites de vértices inseridos nessas árvores, mantendo inalterada a conectividade algébrica, que foram apresentados em (Rodrigues, 2013).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, N. M. M.; *Old and new results on algebraic connectivity of graphs*; *Linear Algebra and its Applications*, 423, p. 53-73, **2007**.
- ALBUQUERQUE, M. D. B.; *Perturbações em grafos e seus efeitos sobre a conectividade algébrica*; *Dissertação de Mestrado, CEFET/RJ, Programa de Pós-Graduação em Tecnologia*, **2012**.
- DE OLIVEIRA, C. C. G. F.; *Inserção de uma aresta num grafo e o efeito produzido na conectividade algébrica*; *Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, Abril* **2012**.
- EATON, J. W.; *GNU Octave*; 1998. URL <http://www.gnu.org/software/octave> 3.2 Version
- FIEDLER, M.; *Algebraic connectivity of graphs*; *Czechoslovak Mathematical Journal*, **1973**, 23(2), p. 298-305.
- FIEDLER, M.; *A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory*. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **1975**, 25(4), p. 619-633.
- GRONE, R.; Merris, R.; *Algebraic Conectivity of Trees*, *Czechoslovak Mathematical Journal*, **1987**, 37(112), p. 660-670.
- KIRKLAND, S.; *Algebraic connectivity for vertex-deleted subgraphs, and a notion of vertex centrality*; *Discrete Mathematics*, **2010**, 310, p. 911-921.
- KIRKLAND, S.; Neumann, M.; Shader, B. L.; *Characteristic Vertices of Weighted Trees via Perron Values*; *Linear and Multilinear Algebra*, **1996**, 40, p. 311-325.
- LEE, L.; *Novos Resultados Sobre Conectividade de Árvores*; *Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, Programa de Engenharia de Produção, Rio de Janeiro, Brasil*, **2012**.
- MOSK-AOYAMA, D.; *Maximum Algebraic Connectivity Augmentation is NP-Hard*; *Operations Research Letters*, **2008**, 36, p. 677-679.
- RODRIGUES, S.; *Sobre a Conectividade Algébrica e seus Autovetores na Classe das Árvores*; *Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, Brasil*, **2013**.
- STEVANOVIC, D.; Brankov, V.; Cvetkovic, D.; e Simic, S.; *NewGraph*; **2003**. URL www.mi.sanu.ac.rs/newgraph/