

ALGUNS EXPERIMENTOS COM A CONECTIVIDADE ALGÉBRICA EM GRAFOS ALEATÓRIOS

Tanilson Dias dos Santos*, Cláudia Marcela Justel
Instituto Militar de Engenharia (IME), Seção de Engenharia da Computação –
Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
*tanilsondiasdossantos@gmail.com

RESUMO

A conectividade algébrica, $a(G)$ é um parâmetro espectral associado a um grafo e definido como o segundo menor autovalor de sua matriz laplaciana. Este parâmetro é utilizado para determinar a conexidade de um grafo e pode ser calculado em grafos de tamanho relativamente grande, como objetivo de aproximar ou estimar algumas informações sobre o grafo (diâmetro, distribuição de graus do grafo, tamanho de corte de arestas). Neste trabalho é investigado o comportamento da conectividade algébrica nos principais modelos de grafos aleatórios citados na literatura (Erdős-Rényi, *Small World* e ligação preferencial). Também são propostos e analisados dois modelos de grafos aleatórios híbridos. Algumas observações a respeito de limites para a conectividade algébrica são apresentadas.

Palavras-chave: Teoria Espectral de Grafos, conectividade algébrica, grafos aleatórios, redes complexas.

ABSTRACT

The algebraic connectivity, a spectral parameter associated with a graph, is defined as the second smallest eigenvalue of its laplacian matrix. This parameter is used to determine the connectivity of a graph, and can be calculated on graphs of relatively large size, in order to approximate or estimate some information about the graph (diameter, degree distribution of graph, cut size of edges). This work investigates the behavior of the algebraic connectivity in random graphs models from the literature (Erdős-Rényi, Small World, preferential attachment). Also, two models of hybrid random graphs are proposed and analyzed. Some observations about bounds for the algebraic connectivity are presented.

Keywords: Spectral Graph Theory, algebraic connectivity, random graphs, complex networks.

INTRODUÇÃO

A conectividade algébrica, $a(G)$, é um importante invariante da Teoria Espectral de Grafos. Representa o segundo menor autovalor da matriz laplaciana de um grafo G ,

e é um bom parâmetro para medir o quão conexo ele é (Abreu, 2007).

A teoria de grafos aleatórios (Random Graph Theory, [Albert, 2002]) tem como fundamento o trabalho de Erdős e Rényi no qual é proposto o modelo clássico. A partir desse modelo clássico, outros modelos de grafos aleatórios foram propostos. Os três modelos de grafos aleatórios mais importantes são analisados neste trabalho.

Várias pesquisas foram desenvolvidas para estudar o comportamento dos autovalores de grafos, e de grafos aleatórios. Neste trabalho estamos interessados em fazer um estudo experimental sobre os autovalores da matriz laplaciana de grafos aleatórios, e em particular da conectividade algébrica. No livro de Chung, [Chung, 2006], são apresentados resultados para grafos aleatórios considerando que a sequência de graus desses grafos seguem uma distribuição determinada. Em [Zhan, 2010] foi apresentado um trabalho experimental com grafos dos três modelos mais importantes de grafos aleatórios: Erdős - Rényi, *Small World* e Ligação Preferencial.

O objetivo deste trabalho é observar o comportamento e identificar relações dos autovalores com outros invariantes do grafo, na classe de grafos aleatórios. Faremos um estudo experimental sobre autovalores, tendo como referência o trabalho de [Zhan, 2010] (no qual são utilizados valores fixos dos parâmetros de cada grafo). Nossa proposta é combinar diferentes valores dos parâmetros (alto, médio e baixo), de cada um dos três modelos de grafos aleatórios mencionados. É dada uma atenção especial ao segundo menor autovalor, conhecido como conectividade algébrica e a sua relação com outros invariantes: grau mínimo, número de triângulos e medidas de centralidade.

Este artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção “Conceitos básicos” são apresentados conceitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Algumas propriedades sobre o parâmetro espectral denominado conectividade algébrica são descritas na Seção “Conectividade algébrica”. A Seção “Grafos Aleatórios” introduz os três modelos de grafos aleatórios manipulados neste trabalho. A Seção “Experimentos com os grafos aleatórios de três modelos” descreve, para cada um dos três modelos apresentados na seção anterior, os resultados obtidos para a conectividade algébrica, assim como outros invariantes, quando consideramos valores específicos dos parâmetros que definem cada modelo. A Seção “Modelos Híbridos Propostos - Definição e Experimentos” traz a definição de dois novos modelos híbridos e os experimentos realizados com esses grafos. Finalizando o trabalho, a Seção “Conclusão e Trabalhos futuros” apresenta as considerações finais do trabalho.

CONCEITOS BÁSICOS

Um **grafo** G é uma estrutura composta por dois conjuntos. O conjunto V é finito e não vazio e seus elementos são denominados **vértices**. O conjunto E é formado por subconjuntos de pares de elementos de V , os quais são denominados **arestas**. Notaremos $|V| = n$ e $|E| = m$. Se $\{u, v\} \in E$, dizemos que e **incide em** u e v . O **grau de um vértice** v é denotado por $\text{grau } v$ e corresponde ao número de arestas que incidem em v . Denotaremos o **grau mínimo** do grafo por $\delta(G) = \min_{v \in V} \text{grau}(v)$, o **grau**

máximo $\Delta(G) = \max_{v \in V} \text{grau}(v)$ por e o **grau médio** do grafo por $d = \frac{\sum_{v \in V} \text{grau}(v)}{n}$.

O **grafo complementar** de um grafo $G = G(V, E)$ é o grafo $\bar{G} = \overline{(V, E)}$ onde $V = \bar{V}$ e $\{v_i, v_j\} \in \bar{E}$ quando $\{v_i, v_j\} \notin E$. Diz-se que o grafo G é **conexo** quando existe um caminho ligando cada par de seus vértices. Em caso contrário G é denominado **desconexo**. Uma sequência finita v_1, v_2, \dots, v_k de vértices de um grafo $G = (V, E)$ é dita uma **cadeia** de v_1 a v_k quando $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k-1$. Dizemos que v_1, v_2, \dots, v_k é uma **cadeia fechada** (respectivamente, **cadeia aberta**) quando $v_1 = v_k$ (respectivamente, $v_1 \neq v_k$). Um **caminho** é uma cadeia em que todos os vértices são distintos. Um caminho fechado é denominado **ciclo**. O **comprimento de um caminho** ou ciclo é o número de arestas que neles ocorrem. Seja G um grafo conexo, chamamos a distância de x a y e denotamos por $d(x, y)$, ao mínimo dos comprimentos dos caminhos que ligam x a y . O máximo da distância entre dois vértices quaisquer de G é chamado diâmetro de G e denotamos por $\text{diam}(G)$. Quando G é desconexo, dizemos que $\text{diam}(G) = \infty$. Uma **clique** em um grafo G é um subconjunto de vértices que induz um grafo completo.

A **conectividade de vértices** de um grafo, denotada por $k(G)$, é o menor número de vértices que ao serem retirado tornam o grafo desconexo. A **densidade de arestas** de um grafo é a razão entre a quantidade de arestas (m) do grafo e a quantidade de arestas do grafo completo com a mesma quantidade de vértices ($n \cdot (n-1) / 2$). A **centralidade de intermediação (betweenness)** de um vértice $v \in V$, notada por $cb(v)$, é definida da seguinte forma: seja σ_{st} é o número de caminhos mínimos entre s e t , e $\sigma_{st}(v)$ é o número de caminhos mínimos entre s e t , que passam por v : $cb(v) = \sum_{s \neq v \neq t \in V} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$. Esta medida pode ser normalizada, dividindo-se a mesma pelo número de pares de vértices que não incluem v , isto é $(n-1)(n-2)$ para grafos direcionados e $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ para grafos não-direcionados. A **centralidade de proximidade (closeness)** de um vértice $v \in V$, notada por $cc(v)$ é definida como: $cc(v) = \frac{n-1}{\sum_{t \in V \setminus v} d_G(v, t)}$, onde $d_G(v, t)$ é o comprimento do menor caminho do vértice v a cada vértice $t \neq v$ do grafo G .

Existem duas matrizes que podem ser associadas a um dado grafo. Os autovalores associados a essas duas matrizes produzem informações sobre o grafo. Supor que G é um grafo não direcionado e sem vértices isolados.

A **matriz de Adjacência**, $A(G)$, é definida como $A(G) = (a_{ij})$, onde, $a_{ij} = 1$ se $(v_i, v_j) \in E$ e 0, se $(v_i, v_j) \notin E$. O espectro da matriz de adjacência é denotado por $\mu_n \leq \mu_{n-1} \leq \dots \leq \mu_1$, considerando os autovalores numerados em forma não decrescente e com repetição, caso existam autovalores com multiplicidade maior que 1.

A **matriz Laplaciana**, $L(G)$, é definida como $L(G) = D(G) - A(G)$, onde $A(G)$ é a matriz de adjacência $L(G) = (d_{ij})$ a matriz diagonal com entradas $d_{ij} = \text{grau}(v_i)$. Para um grafo G , denotamos os autovalores da matriz laplaciana $L(G)$ por $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$, considerando os autovalores numerados em forma não decrescente e com repetição, caso existam autovalores com multiplicidade maior que 1.

A teoria de matrizes aleatórias [Tao, 2012] estuda matrizes cujos elementos são variáveis aleatórias. Um dos principais resultados relacionados ao estudo de matrizes aleatórias, a lei do semicírculo de Wigner, [Wigner, 1958], garante que

todos os autovalores da matriz aleatória se encontram em um semicírculo de raio dado (sendo que o maior autovalor converge fracamente para isso). As matrizes aleatórias são utilizadas em diversas aplicações como, por exemplo, teoria das cordas, sistemas caóticos, ótica, finanças, teoria da informação, dentre muitas outras.

CONECTIVIDADE ALGÉBRICA

Provavelmente um dos mais importantes invariantes de um grafo que podemos obter da matriz laplaciana é a conectividade algébrica, [Molitierno, 2012], definido como o segundo menor autovalor da matriz laplaciana do grafo, e denotado por $a(G)$.

Os autovalores da matriz laplaciana de um grafo G , com n vértices, denotada $L(G)$, satisfazem as seguintes propriedades: Todos os autovalores de $L(G)$ pertencem ao intervalo $A[0, n]$. Além disso, para um grafo qualquer $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq n$. A multiplicidade do autovalor 0 é igual ao número de componentes conexas em G . Em particular, G é conexo se e somente se $\lambda_2 > 0$. Seja $G = (V, E)$, $|V| = n$, então $\lambda_2 G = n - \lambda_2(G)$. Seja K_n o **grafo completo** com $n > 1$ vértices, então $\lambda_2(K_n) = n$. Se $G \neq K_n$, então $\lambda_2(G) \leq n - 2$. Seja $k(G)$ a conectividade de vértices de G , então $\lambda_2(G) \leq k(G)$. Seja $\delta(G)$ o grau mínimo em (G) , então $\lambda_2(G) \leq \delta(G)$, [Fiedler, 1973]. Se G é conexo com n vértices, então $\lambda_2(G) \geq \frac{4}{\text{ndiam}(G)}$. Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ onde $V_1 = V_2$ e $E_1 \subseteq E_2$ então $\lambda_2(G_1) \leq \lambda_2(G_2)$ [Mohar, 1991].

A conectividade algébrica desempenha um papel fundamental no estudo de um grafo. Este autovalor está associado a importantes invariantes de grafos. Foi comprovado que grafos com conectividade algébrica grande (em comparação com o grau máximo) tem propriedades importantes em várias aplicações, [Mohar, 1991].

GRAFOS ALEATÓRIOS

Um trabalho seminal sobre grafos aleatórios foi publicado em 1959, pelos matemáticos húngaros Paul Erdős e Alfred Rényi. Desde então diversas pesquisas a respeito do modelo proposto nesse artigo e análise e desenvolvimento de outros modelos de grafos aleatórios foram publicadas. Esses modelos aleatórios permitiram representar as diversas redes complexas encontradas na natureza (redes de ligações químicas, proteínas, redes de relações pessoais e interações), e também redes artificiais (redes sociais, redes de transporte, tubulações de encanamento, redes de telecomunicações, entre outras).

Existem alguns fenômenos que foram observados nos diferentes modelos de grafos aleatórios. Os fenômenos *Small World*, *power law*¹ e *clustering* são alguns exemplos. Dependendo do modelo gerador utilizado para desenvolver o grafo aleatório, as características de ligação entre os vértices, distribuição de graus dos vértices e diâmetro do grafo variam especificamente.

Em 1998, Barabási, (Albert, 1999), examinou uma porção da internet com auxílio de um *web-crawler* e descobriu uma distribuição dos graus dos vértices do grafo seguindo a relação *power law*, em lugar da forma esperada, que seria uma distribuição de Poisson². As informações levantadas nessa descoberta incentiva-

1 *Power Law*- é uma função de relacionamento entre duas variáveis, onde uma varia como potência da outra.

2 *Distribuição de Poisson*- é uma distribuição de probabilidade para uma variável aleatória discreta que expressa a probabilidade de uma série de eventos ocorrer num certo período de tempo de maneira independente do evento anterior (*memoryless*).

ram a idéia de que a maioria dos sistemas complexos naturais poderia apresentar uma estrutura similar. A seguir, apresentamos as definições dos três modelos de grafos aleatórios utilizados neste trabalho.

Definição 1 (Molitierno, 2012) *Dados $n = |V|$ e $m = |E|$ fixos, um grafo aleatório é um grafo escolhido com uma probabilidade $0 < p < 1$ dentre todos os grafos com n vértices e m arestas.*

O modelo Erdős-Rényi (ER), também denominado grafo aleatório fundamental, pode ser descrito como segue:

Definição 2 (Chung, 2006) *Dado um número real p , $0 \leq p \leq 1$ cada aresta potencial de G é selecionada com probabilidade p , independente de outras arestas. Denotamos por $G_{n,p}$ o grafo aleatório fundamental com n vértices, para o qual cada aresta é determinada com probabilidade p .*

Observar que um grafo com n vértices possui, no máximo, $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} = N$ arestas. Para um grafo aleatório que verifica a **Definição 2**, temos que cada uma das $\frac{n(n-1)}{2}$ arestas tem a probabilidade $p = (C_m^N)^{-1} = \frac{n(n-1)}{2}$ de pertencer ao grafo. Considerando o grafo G com n vértices e m arestas, suponha que queremos encontrar a probabilidade de ser escolhido de forma aleatória segundo a **Definição 1**. Então a probabilidade que m arestas sejam escolhidas é p^m , enquanto a probabilidade das $N - m$ arestas restantes G não sejam escolhidas é $p^m (1 - p)^{N - m}$. Um grafo aleatório que verifica a **Definição 1**, onde cada grafo com n vértices e m arestas tem a mesma probabilidade de ser escolhido, pode ser considerado um grafo que verifica a **Definição 2** com valor de probabilidade $p^m (1 - p)^{N - m}$.

Portanto os modelos das definições 1 e 2 são essencialmente equivalentes quando n é grande (Bollobas, 2001). Resumidamente, pode-se dizer que o grafo verificando a **Definição 1** é um grafo aleatório escolhido dentro do conjunto de todos os grafos que possuem n vértices e m arestas. E o grafo verificando a **Definição 2** é um grafo aleatório que possui n vértices e um conjunto de arestas variável, de acordo com a probabilidade p .

Redes *Small World* são caracterizadas por ter, diâmetro pequeno. Um exemplo de rede *Small World* é a rede que representa a população humana e a ideia de “seis graus de separação”. Essa idéia foi confirmada por diversos estudos sobre redes sociais (Wu, 2007).

O modelo de grafo aleatório denominado *Small World* pode ser criado de duas formas, propostas por (Newman, 1999) e (Watts, 1998). Nas Definições 3 e 4 seguiremos a descrição dada em (Wu, 2007).

Definição 3 *Dados n e p , $0 \leq p \leq 1$, um grafo que segue o modelo Watts-Strogatz (WS) pode ser construído da seguinte forma: iniciar com um grafo conexo k -regular formado por n vértices. Em cada passo da construção, substituir uma aresta do grafo existente por uma aresta aleatória com probabilidade p .*

Definição 4 *Dados n e p , $0 \leq p \leq 1$, um grafo que segue o modelo Newman-*

-Watts (NW) pode ser construído da seguinte forma: iniciar com um grafo conexo k -regular formado por n_0 vértices. Em cada passo da construção, adicionamos uma aresta aleatória no grafo existente com probabilidade p .

O último modelo de grafo aleatório que apresentamos é o modelo conhecido na literatura como ligação preferencial ou *scale-free*, e foi definido por Barabási-Albert em (Albert, 1999).

Neste texto escolhemos a notação Ligação Preferencial. O modelo Ligação Preferencial verifica duas condições: a característica de crescimento (na medida em que o grafo cresce novos vértices são adicionados) e a característica de preferência de conexão (os vértices adicionados são ligados, preferencialmente a vértices com maior grau). Neste modelo, o grafo não é construído de uma única vez, mas sim ao longo do tempo. Apesar do processo de construção ter ingredientes aleatórios, obedece também a certas regras.

Definição 5 Um grafo aleatório que segue o modelo Ligação Preferencial é construído da seguinte maneira: Dado inteiro, considere um grafo com $n_0 = r$ vértices isolados, onde n_0 é um número pequeno, e sem arestas. Em cada passo t , acrescentar um novo vértice adjacente a r vértices existentes, onde $1 \leq r \leq n_0$. O novo vértice é adjacente a um vértice existente, v_i , de grau $\text{grau}(v_i)$ com probabilidade $P(v_i) = \frac{\text{grau}(v_i)}{\sum_{j=1}^n \text{grau}(v_j)}$ onde $n = n_0 + (t-1)$ vértices n_0 $(t-1)$ -ésimo passo, (Zhan, 2010).

Observar que, pela construção neste modelo, os vértices com maior grau tem maior possibilidade de serem selecionados a cada passo. Dessa forma o grau desses vértices tem possibilidade de aumentar, enquanto os vértices com menor grau tem maior probabilidade de permanecer com menor grau.

EXPERIMENTOS COM GRAFOS ALEATÓRIOS DE TRÊS MODELOS

No artigo (Zhan, 2010) são calculados os autovalores das matrizes de adjacência e laplaciana, para grafos dos três modelos apresentados na seção anterior, gerados aleatoriamente. A partir dos dados coletados, foram propostas algumas observações sobre o comportamento do segundo menor autovalor da matriz Laplaciana, a conectividade algébrica, e do maior autovalor da matriz de adjacência. Nos experimentos foram gerados 1000 grafos, para cada um dos três modelos. Em todos os casos, o valor para o número de vértices é $n = 2500$, valores dos outros parâmetros foram fixados e as probabilidades consideradas foram pequenas ($p = 0,08$, para o modelo ER, $p = 15$, para o modelo WS e $p = 0,02$, para o modelo NW).

Nosso trabalho estende os experimentos realizados por (Zhan, 2010) com os mesmos três modelos de grafos aleatórios, mas escolhendo valores dos parâmetros de cada modelo de maneira diferente. Nas próximas subseções descrevemos os parâmetros estabelecidos em cada caso dos nossos experimentos.

A máquina utilizada nos experimentos possui 4GB de RAM, processador Intel Core i5-3317U, CPU 1.70GHz x 4, arquitetura de 64-bit e sistema operacional Ubuntu 12.04 LTS. Para o desenvolvimento dos experimentos foram utilizados os

softwares *Networkx* (Networkx, 2014), para a geração de redes complexas e cálculo de alguns invariantes, e o *Numpy* (Numpy, 2014), para cálculo de autovalores.

Nos experimentos com todos os modelos desta seção foram realizadas as mesmas tarefas: gerar grafos, calcular autovalores da matriz laplaciana, determinar graus, calcular densidade, diâmetro, grau mínimo e máximo, calcular número de vértices de grau mínimo e máximo, número de triângulos ao qual cada vértice pertence, *betweenness* e *closseness* de cada vértice.

MODELO ERDŐS-RÉNYI (ER)

Foram gerados 400 grafos do modelo ER, cujos parâmetros estão descritos na Tabela Tab 1. Um exemplo de grafo gerado para $n = 40$ $p = 0.5$ pode ser visto na Figura 1(a), com a distribuição de graus e autovalores. A Tabela Tab 2 mostra os tempos de execução para obter os grafos da Tabela Tab 1.

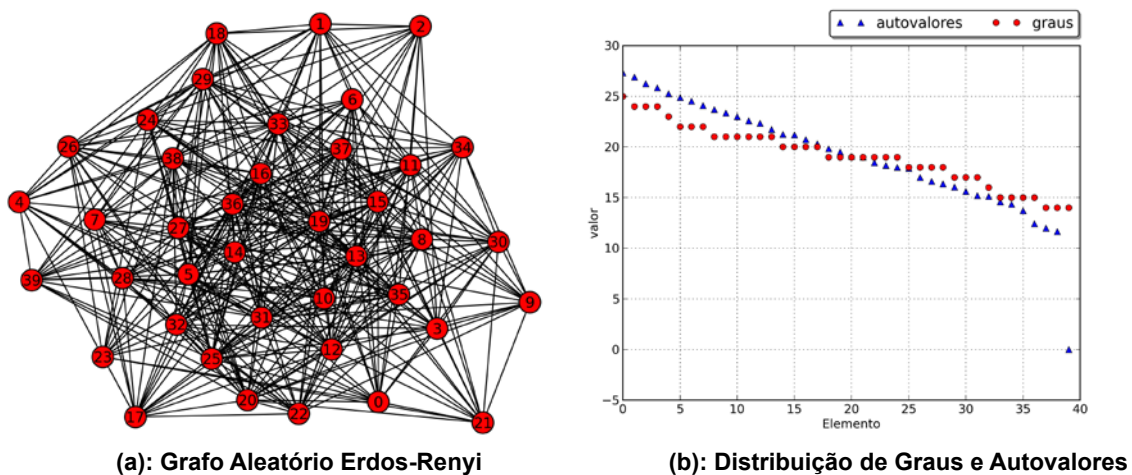


Figura 1: Grafo Aleatório e Distribuição de Graus e Autovalores do modelo Erdős-Rényi $n=40$ e $p = 0.5$

	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8	0.9
20	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	-
30	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	-
40	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	-
50	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	-
60	-	-	-	-	-	10	-	10	-	-	10
70	-	-	-	-	-	10	-	10	-	-	10
80	-	-	-	-	-	10	-	10	-	-	10

Tabela 1: Número de grafos aleatórios gerados para o modelo Erdős Renyi com parâmetros n e p

$n \setminus p$	$p \in P1$	$p \in P2$
$20 \leq n \leq 50$	172.90seg	-
60	-	185.25seg
70	-	1378.12seg
80	-	> 24hs

Tabela 2: Tempos de execução para obter invariantes dos grafos aleatórios da Tab1 ($P_1 = \{0.01 \leq p \leq 0.8\}$, $P_2 = \{0.1; 0.5; 0.9\}$)

MODELO LIGAÇÃO PREFERENCIAL (LP)

Para o modelo LP também foram gerados 400 grafos diferentes, obtidos a partir de quatro etapas de geração. Cada etapa corresponde a um conjunto de grafos com o mesmo número de vértices do caso anterior, a saber, $n \in \{20,30,40,50\}$. Para cada escolha de n , foram considerados os valores de $r \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Um exemplo de grafo gerado pode ser visto na Figura 2(a) ($n = 40$, $r = 5$) onde os autovalores da matriz laplaciana e os graus dos vértices estão representados em ordem não crescente na Figura 2(b). O tempo de execução do conjunto (para realização de todas as operações, com o conjunto de 10 grafos com $n = 40$ e $r = 5$) foi de 4.60 segundos. O tempo total de execução para geração dos 400 grafos foi de 192.42 segundos.

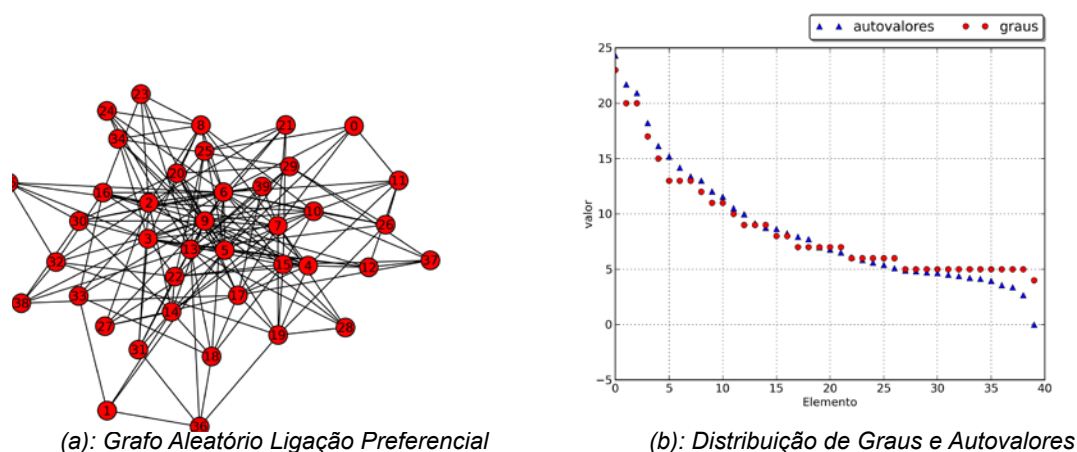


Figura 2: Grafo Aleatório e Distribuição de Graus e Autovalores do modelo Ligação Preferencial $n=40$ e $r = 5$

Além dos 400 grafos gerados, foram realizados testes com $n \in \{60,70,80,90, 100, 110, 120, 130, 140, 150\}$, porém $r \in \{1, 5, 9\}$ com menos valores de grau médio. O tempo de execução do conjunto foi de 816.21 segundos.

No gráfico da Figura 2(b) podemos observar que a relação entre graus e autovalores está ainda mais próxima que no caso da Figura 1(b) e para o grafo do modelo de Ligação Preferencial a conectividade algébrica tende a assumir valores mais próximos do seu limite superior, que é o grau mínimo. É interessante observar que os autovalores assumiram, em média, valores menores que no modelo ER mostrado na Figura 1(a).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
30	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
40	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
50	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
60	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
70	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
80	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
90	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
100	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
110	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
120	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
130	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
140	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
150	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10

Tabela 3: Número de grafos aleatórios gerados para o modelo Ligação Preferencial com parâmetros e

	$r \in M1$	$r \in M2$
$20 \leq n \leq 50$	192.42seg	-
$60 \leq n \leq 150$	-	816.21 seg

Tabela 4: Tempos de execução para obter invariantes dos grafos aleatórios da Tab3 ($M_1=\{1 \leq r \leq 10\}$, $M_2=\{1; 5; 10\}$)

MODELO SMALL WORLD

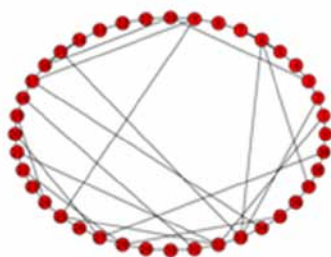
Todos os experimentos realizados para este modelo utilizaram como grafo inicial um ciclo, ou seja, um grafo conexo 2-regular. O número de grafos gerados para cada combinação dos parâmetros n e p são mostrados na Tabela 5.

	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09	0.1	0.3	0.5	0.7	0.8
20	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
30	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
40	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
50	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
60	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
70	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
80	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
90	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
100	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
110	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
120	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
130	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
140	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10
150	10	-	-	-	10	-	-	-	-	10

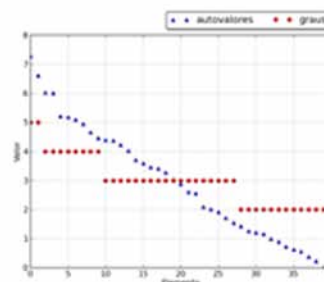
Tabela 5: Número de grafos aleatórios gerados para o modelo Small World com parâmetros n e p

MODELO SMALL WORLD: NEWMAN-WATTS

Para o modelo *Small World Newman-Watts (NW)* foram gerados 400 grafos com diferentes números de vértices, segundo mostra a Tabela Tab 5. Um exemplo de grafo gerado com $n = 40$ vértices e $p = 0,5$ pode ser visto na Figura 3(a) e os autovalores com os graus dos vértices são representados em ordem não crescente na Figura 3(b).



(a): Grafo aleatório do Modelo Newman-Watts



(b): Distribuição de graus e autovalores Small Word (Newman-Watts)

Figura 3: Grafo aleatório e Distribuição de Graus e Autovalores do modelo Small World (Newman-Watts)
 $k=2$, $n=40$ e $p=0,5$

O tempo necessário para gerar todos os grafos e calcular todos os invariantes é exibido na Tabela Tab 6.

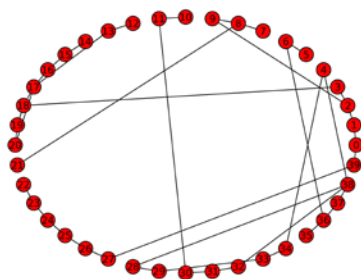
n/p	$p \in P_1$	$p \in P_2$
$20 \leq n \leq 50$	228.60seg	-
$60 \leq n \leq 150$	-	221.04 seg

Tabela 6: Tempos de execução para obter invariantes dos grafos aleatórios do modelo SW-NW ($P_1=\{0.01 \leq p \leq 0.8\}$, $P_2=\{0.1; 0.5; 0.8\}$)

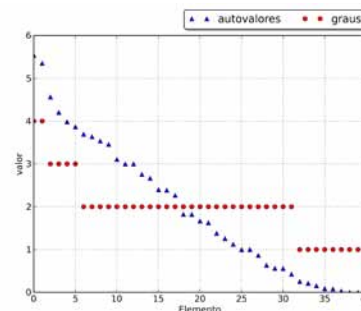
Podemos também observar que a relação entre a distribuição dos graus dos vértices e os autovalores difere da distribuição nos modelos apresentados nas seções “Modelo Erdős-Rényi (ER)” e “Modelo de Ligação Preferencial (LP)”.

MODELO SMALL WORLD: WATTS-STROGATZ

Para o modelo *Small World* Watts-Strogatz (WS) foram gerados 400 grafos com diferentes números de vértices, segundo mostra a Tabela Tab 5. Um exemplo de grafo gerado pode ser visto na Figura 4(a) (para $k = 2$, $n = 40$ e $p = 0.5$) e os autovalores e os graus dos vértices são representados em ordem não crescente na Figura 4(b). O tempo necessário para gerar todos os grafos e calcular todos os invariantes é mostrado na Tabela Tab 7.



(a): Grafo Aleatório do Modelo Small World (Watts-Strogatz)



(b): Distribuição de Graus e Autovalores Small World (Watts-Strogatz)

Figura 4: Grafo aleatório e Distribuição de Graus e Autovalores do Modelo Small World (Watts-Strogatz)

n/p	$p \in P_1$	$p \in P_2$
$20 \leq n \leq 50$	210.89seg	-
$60 \leq n \leq 150$	-	193.92 seg

Tabela 7: Tempos de execução para obter invariantes dos grafos aleatórios do modelo SW-WS ($P_1=\{0.01 \leq p \leq 0.8\}$, $P_2=\{0.1; 0.5; 0.8\}$)

É possível notar que os graus e autovalores seguiram um comportamento similar ao apresentado na Subseção “Modelo Newman-Watts”.

MODELO HÍBRIDOS PROPOSTOS: DEFINIÇÃO E EXPERIMENTOS

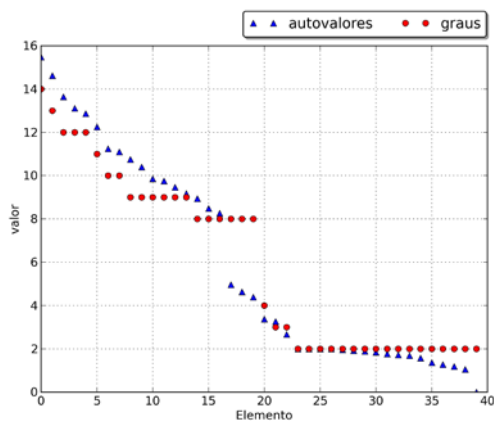
Depois de observar o comportamento dos autovalores nos modelos de grafos estudados, propomos dois modelos híbridos baseados nos existentes. Esses mo-

delos são apresentados na Seção “Modelos Híbridos Propostos – Definição e Experimentos”. A motivação dos mesmos foi observar o que acontece quando existe a fusão de dois dos modelos estudados. Os resultados e a metodologia de testes, tais como os algoritmos utilizados para gerar os grafos são apresentados a seguir.

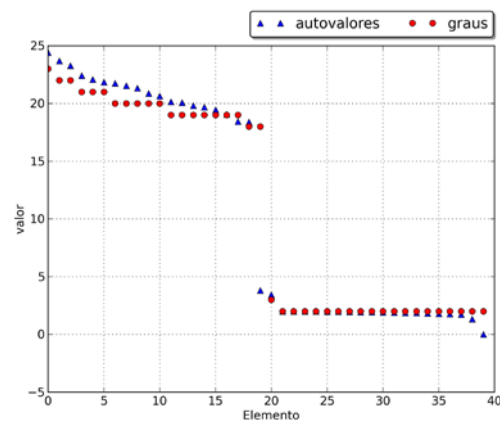
GRAFO HÍBRIDO K-REGULAR X LIGAÇÃO PREFERENCIAL

Definição 6 Um grafo híbrido k-regular X Ligação Preferencial é construído da seguinte maneira: dados os parâmetros de entrada n_0 , n , k e r , onde n_0 é o número de vértices de um grafo k-regular conexo, inicial n , n_0 é o número final de vértices, r é o grau médio de cada novo vértice inserido. Respeitadas as restrições³ sob n_0 , r e k ; iniciar a geração com um grafo regular conexo de grau k com n_0 vértices; a seguir, inserir vértices segundo o processo de geração do modelo de Ligação Preferencial, até atingir n vértices.

Inicialmente foram realizados alguns testes fixando n e com diferentes valores para o número inicial de vértices $n_0 = \frac{n}{2}, 3 \cdot \frac{n}{4}, \frac{n}{8}$, diferentes valores para o grau médio dos novos nós inseridos. A notação (n_0, n, k, r) é usada para referenciar um grafo definido segundo este modelo. Neste caso, foram calculados os graus dos vértices, os autovalores da matriz laplaciana de cada grafo gerado, além de alguns invariantes (número de arestas, grau mínimo δ e máximo Δ , densidade, entre outros). As Figuras 5(a), 5(b), 5(c) apresentam os gráficos dos autovalores e graus ordenados de forma não decrescente do grafo gerado com $n = 40$ e os valores de n_0 , k , r e indicados. Podemos observar que existe um *gap* tanto nos autovalores quanto nos graus dessas figuras. Quanto maior a diferença entre k e r , sendo $k > r$, maior é o *gap*. Porém, quando k e r são iguais, e quando a diferença é pequena e com $r > k$, notamos que o comportamento dos graus dos vértices e dos autovalores é semelhante ao que ocorre no modelo Ligação Preferencial. A partir dessas observações para este modelo híbrido, podemos induzir que o valor do parâmetro k tem influência sobre o comportamento dos autovalores e dos graus do grafo.

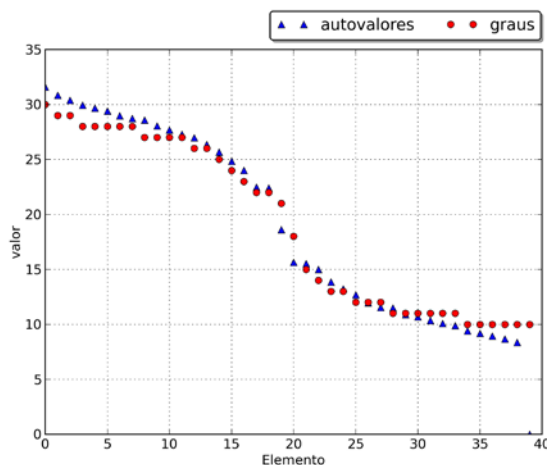


(a): Autovalores ($n_0 = n/2, n=40, k=8, r=2$)



(b): Autovalores ($n_0 = n/2, n=40, k=19, r=2$)

³ O valor de n_0 é limitado superiormente por $n - 1$ e, k e r por $n_0 - 1$.



c): Autovalores ($n_0 = n/2$, $n = 40$, $k = 19$, $r = 10$)

Figura 5: Distribuição de Graus e Autovalores de Grafos Híbridos do Modelo k -regular x Ligação Preferencial

Nos gráficos das Figuras 5(b) e 5(c), os grafos possuem $n = 40$ vértices e foram criados a partir de um grafo 19-regular com $n_0 = n/2 = 20$ vértices. Quando é máximo, o grafo inicial é completo (como no caso das Figuras 5(b) e 5(c)). Os autovalores destes dois grafos representados nas Figuras 5(b) e 5(c) onde $n = 40$, $n_0 = 20$ e $k = 19$ apresentam *gap*, sendo maior para $r = 2$ e menor para $r = 10$.

Podemos observar também que quanto menor for o grafo inicial, o comportamento dos autovalores do modelo híbrido ficam mais próximo do comportamento dos autovalores do modelo de Ligação Preferencial.

Outro teste foi efetuado com o modelo híbrido para grafo inicial com $n = 40$ e $n_0 = 3$. $n/4 = 30$. Quando n e k são iguais há uma grande quantidade de vértices de mesmo grau e quando m é um pouco maior que a distribuição dos graus é mais homogênea. A curva dos autovalores destes grafos é semelhante a curva dos autovalores do modelo *Small World*.

Os valores dos parâmetros utilizados nos testes foram $n \in \{40, 50, 60\}$, $n_0 = n/2$, $n/8, 3.n/4$, $k \in \{2, 4, 8, n/2, n_0 - 1\}$, $r \in \{2, 4, 8, n_0/2 - 1\}$.

No total, foram gerados 1620 grafos, sendo 540 grafos gerados para $n = 40$, 540 grafos gerados para $n = 50$ e 540 grafos gerados para $n = 60$.

GRAFO HÍBRIDO NEWMAN-WATTS X LIGAÇÃO PREFERENCIAL

Um grafo híbrido Newman-Watts X Ligação Preferencial consiste em uma fusão do modelo Newman-Watts, de (Watts, 1998), com o modelo de Ligação Preferencial proposto por (Albert, 2002).

Definição 7 Um grafo híbrido Newman-Watts X Ligação Preferencial é construído da seguinte maneira: Dados parâmetros n , k , r , n_0 , p , onde os quatro primeiros parâmetros correspondem a números inteiros e o último a um valor real que representam respectivamente: n é o número de vértices do grafo final; k corresponde ao grau médio de cada vértice no grafo inicial k -regular; n_0 é quantidade de vértices inicial; p representa a probabilidade de adição de novas arestas entre os n_0 vértices iniciais; e r corresponde aos novos vértices adicionados no grafo se

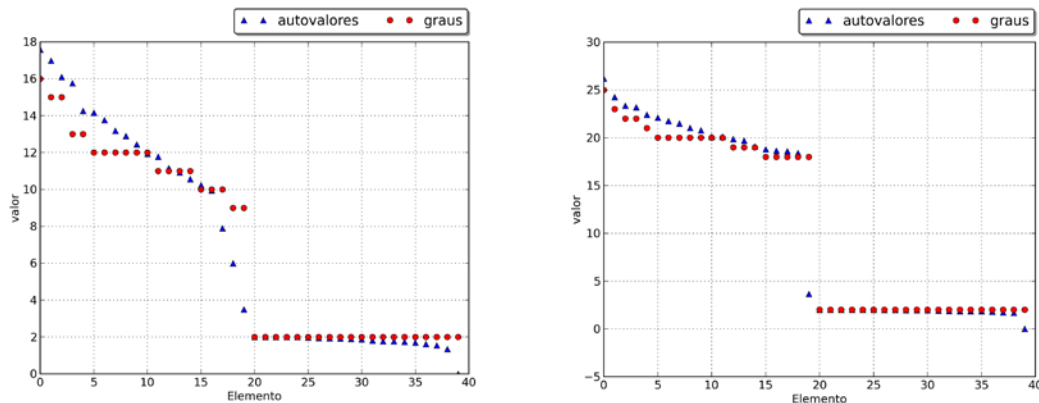
ligam a m outros vértices.

Respeitadas as restrições⁴ cria-se um grafo com n_0 vértices forando um grafo conexo e k -regular; e adicionar aresta com probabilidade p segundo o modelo *Small World* Newman-Watts, a seguir, inserir novos vértices segundo o modelo Ligação Preferencial até obter um grafo com n vértices.

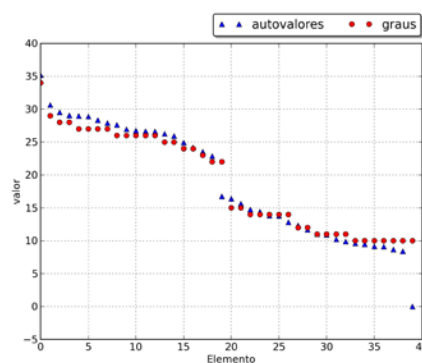
Neste modelo é criado um grafo k -regular inicial, logo, são adicionadas arestas segundo modelo Newman-Watts, posteriormente adicionar novos vértices segundo o critério de Ligação Preferencial.

A principal diferença entre este modelo e o apresentado na Subseção “Grafo Híbrido k -regular X Ligação Preferencial” é o grafo inicial, para o qual existe um parâmetro de probabilidade p (que controla a adição de arestas do modelo Newman-Watts). Observar que o grafo deste modelo híbrido quando p é próximo de 1, tende a ser mais denso que o apresentado na seção anterior.

Os testes foram realizados com os seguintes valores para os parâmetros $n \in \{40, 50, 60\}$, $n_0 = n/2$, $n/8$, $3 \cdot n/4$ $k \in \{2, 4, 8, n_0/2, n_0 - 1\}$, $r \in \{2, 4, 8, n_0/2, n_0 - 1\}$, $p \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.9\}$.



(a): Autovalores ($n_0 = n/2$, $n=40$, $k=8$, $r=2$, $p=0.9$) (b): Autovalores ($n_0 = n/2$, $n=40$, $k=19$, $r=2$, $p=0.9$)



(c): Autovalores ($n_0 = n/2$, $n=40$, $k=19$, $r=10$, $p=0.9$)

Figura 6: Distribuição de Graus e Autovalores de Grafos Híbridos Newman-Watts x Ligação Preferencial

Em comparação com os grafos gerados na seção anterior pôde-se observar a influência da adição do fator de probabilidade nas curvas dos autovalores. Para uma mesma (dada) configuração do modelo k -regular x Ligação Preferencial e Newman-Watts x Ligação Preferencial com probabilidades baixas (e.g. $p = 0.1$)

⁴ O valor é limitado superiormente por $n - 1$, k e r , são limitados superiormente por $n_0 - 1$, e $p \in (0, 1)$ (assume qualquer valor no intervalo real entre zero e um).

o gráfico dos autovalores apresentava exatamente o mesmo comportamento para ambos modelos. Porém, quando p cresce ($p = 0.9$), notamos um aumento tanto dos autovalores quanto dos graus dos vértices. O *gap* observado no modelo Newman-Watts x Ligação Preferencial varia dependendo de p , quando r e k são próximos. Observamos que quando a diferença entre k e r é pequena p tem forte influência na curva dos autovalores, porém quando a diferença entre k e r aumenta, ver Figura 6(b), um valor de *gap* grande ainda é mantido e p parece ter menor influência nesse caso.

CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foram analisados três modelos de redes complexas: Erdos-Renyi, Ligação Preferencial e *Small World* nos casos Newman-Watts e Watts-Strogatz. Além disso, foram propostos dois modelos híbridos usando um grafo -regular e o modelo *Small World* Newman-Watts como início da construção, e a seguir o modelo Ligação Preferencial.

Para cada modelo, a partir de uma configuração preestabelecida, foram gerados 10 grafos aleatoriamente. Obtivemos um total de 11.350 grafos gerados (530 ER + 1480 *Small World* + 700 LP + 8640 híbridos). Para gerar os principais grafos aleatórios foi utilizado o Networkx e para gerar os modelos híbridos foi desenvolvido um *script* para cada modelo proposto. Os autovalores de todos os grafos analisados foram calculados utilizando o *software Numpy*. Além da distribuição de graus e dos autovalores da matriz Laplaciana de cada grafo gerado, foram calculados os seguintes invariantes: diâmetro, grau mínimo, densidade, número de triângulos ao qual cada vértice pertence, *betweenness*, *closeness*.

Todos os resultados obtidos para cada modelo foram resumidos em relatórios e gráficos que podem ser encontrados com mais detalhes em [Santos, 2014].

O modelo ER, possui menos limitações para a adição de uma aresta dentre os modelos analisados, foi o modelo que produz mais triângulos à medida que o parâmetro p cresce. Os valores de *betweenness* máximo não mostraram relação com o número de triângulos. Quando p cresce, o grafo que é gerado fica denso, e a relação $a(G) = \delta$ próxima de 1 (um).

No caso do modelo Ligação Preferencial, onde n é o número de vértices do grafo final e r o grau do novo vértice que será inserido a cada iteração, e o grafo é inicializado com k de vértices inicialmente isolados (neste trabalho, $k = r$). Observamos que se $r = 1$, os grafos gerados são árvores e, portanto, não contém triângulos. Quando r cresce, maior é o número de triângulos contidos no grafo gerado, ver Tabela Tab 8. Foi notado também que para cada conjunto de configurações, os grafos com maior número de triângulos, e que possuem os menores graus mínimos, são casos em que a relação $a(G) = \delta$ assume os valores mais próximos de 1 (um). Além disso, em geral, neste modelo, o caso onde o número de triângulos é maior dentro de uma configuração apresenta o *betweenness* máximo, ver Tabela Tab 9.

Número de Triângulos para alguns conjuntos de 10 grafos										
$r=1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$r=5$	174	194	175	171	182	180	165	158	167	150
$r=10$	759	820	794	802	750	714	733	778	705	715

Tabela 8: Grafos modelo ligação preferencial =40

$n=40$	$r=6$		$r=8$		$r=9$	
	N° Δ	$max\ cb(v)$	N° Δ	$max\ cb(v)$	N° Δ	$max\ cb(v)$
G1	265	0.143579433896	500	0.104601949295	596	0.0698550628864
G2	231	0.0938500636542	534	0.130526106743	579	0.0793267704705
G3	269	0.119855406363	480	0.101823230931	539	0.0717678584581
G4	257	0.111617780505	440	0.0793230799583	646	0.0943050913699
G5	299	0.236102851067	466	0.0834672583397	574	0.0701499440099
G6	282	0.169274351722	464	0.0880142351519	651	0.146931338793
G7	277	0.180110027215	483	0.078953209413	604	0.0938866187522
G8	258	0.115470713153	478	0.0764135182556	616	0.144674428885
G9	274	0.1231273184	510	0.103612148513	601	0.0809341788673
G10	245	0.0908180612897	506	0.083777685802	606	0.104700349134

Tabela 9: Comparação *betwennes* máximo x número de triângulos no modelo Ligação Preferencial =40 para 10 grafos gerados aleatoriamente

Já para o modelo *Small World*, tanto no caso NW quanto no caso WS, a análise da relação entre o número de triângulos gerados e outros invariantes foi inconclusiva. Podemos observar que, devido ao tipo de construção de grafos deste modelo, o valor utilizado (no nosso caso $k = 2$), influencia o grau mínimo de maneira direta, diferente ao caso dos outros dois modelos analisados.

Para os modelos híbridos, foi notado que quando $n\theta$ é pequeno $r = k$ e também pequenos, o comportamento da conectividade algébrica é semelhante ao do modelo de Ligação Preferencial. Para os casos, do modelo NW-LP, exibidos na Tabela Tab 10, o número máximo de triângulos coincide em geral com os menores valores para a conectividade algébrica, no conjunto dos 10 grafos gerados para cada configuração. E é comum acontecer que os grafos com maior número de triângulos possuem a relação $a(G) / \delta$ mais próximas de 1. As curvas dos autovalores não apresentam *gap*. O mesmo comportamento é apresentado quando $n\theta$, r e k são grandes e estão próximos. Já $n\theta$ com grande, k pequeno e r grande, nota-se um pequeno *gap*. Isso faz os últimos nós inseridos terem grau mais alto o que gera esse *gap* entre graus e autovalores. Para o caso quando $n\theta$ e k são grandes e r é pequeno, ocorre o contrário, o grafo final é mais denso e os últimos nós a serem inseridos ficam com menores graus. Para esse caso também acontece um *gap* que é bem maior do que o do caso anterior.

	$n=40 \ n=5, k=4, m=4 \ p=0.1$		$n=40 \ n=5, k=4, m=4 \ p=0.9$		$n=50 \ n=6, k=4, m=4 \ p=0.5$	
	N° Δ	$a(G)$	N° Δ	$a(G)$	N° Δ	$a(G)$
G1	118	2.38227330937	137	2.17190003979	131	2.31257610357
G2	108	2.39146174373	126	2.33847881468	139	2.45969477637
G3	122	2.40202723494	115	2.44664255729	139	2.49683903092
G4	126	2.64049246304	120	2.22747330752	141	2.5844272057
G5	128	2.45634265229	120	2.40337294414	138	2.5844272057
G6	109	2.37679964834	109	2.47874503905	142	2.14107377865
G7	114	2.23311399359	126	2.32035430485	134	2.32507385363
G8	122	2.59082798445	117	2.45819550297	152	2.14189825483
G9	135	2.28820485078	124	2.54648788572	131	2.33519521126
G10	120	2.53350602578	133	2.3421282708	124	2.25631998974

Tabela 10: Comparação número de triângulos x conectividade algébrica no modelo híbrido NW-LP

Os experimentos realizados neste trabalho permitiram observar algumas particularidades do comportamento da conectividade algébrica nos grafos aleatórios analisados. Mas ainda existem outros assuntos a ser abordados dentro do escopo deste trabalho. Como trabalhos futuros, podemos mencionar as atividades a seguir. Continuar fazendo experimentos com os modelos *Small World*, NW e WS utilizando um grafo k -regular inicial, sendo $k > 2$. Todos os experimentos com este modelo neste trabalho foram inicializados com um ciclo (grafo 2 regular). Procurar novas combinações de modelos aleatórios para gerar modelos híbridos. Por exemplo, fazer experimentos mudando a ordem utilizada, primeiro seguir o modelo Ligação Preferencial e depois *Small World*.

Outra proposta de trabalho futuro é analisar as conclusões de [Zhan, 2010] para o modelo *Small World*. Esses autores afirmam que, a partir dos experimentos realizados, a conectividade algébrica dos grafos gerados para o modelo *Small World* não pertence a um intervalo determinado pelo grau mínimo do grafo.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem às agências de fomento, CNPq (305677/2013-6) e Programa CAPES Demanda Social.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABREU, N.M.M.; *Old and new results on algebraic connectivity of graphs; Linear Algebra and its Applications. Elsevier Science, 423, 53-73, 2007.*
- ALBERT, A.; Barabási, A.L.; *Statistical mechanics of complex networks; Review of Modern Physics, 74, 47, 2002.*
- BARABÁSI, A.L.; Albert, A.; *Emergence of scaling in random networks; Journal Science, 1999, 286, 509-512.*
- BOLLOBAS, B.; *Random Graphs; Cambridge University Press, 2001.*
- FIEDLER, M.; *Algebraic connectivity of graphs; Czechoslovak Mathematical Journal, 1973, 23, 298-305.*
- CHUNG, F.; Lu, L.; *Complex Graphs, Networks; American Mathematical Society, 2006.*
- HOLROYD, M.; Kincaid, R.; *Synchronizability and Connectivity of Discrete Complex Systems; Proceedings of the International Conference on Complex Systems, 2006, New England Complex Systems Institute, Quincy, MA. 2006.*
- MOHAR, B.; *Eigenvalues, diameter, mean distance in graphs; Graphs and Combinatorics, 7(1), p. 53-64, 1991.*
- MOLITIERNO, Jason J.; *Applications of Combinatorial Matrix Theory to Laplacian Matrices of Graphs; Chapman, Hall/CRC, 2012.*
- NETWORKX. url: <http://networkx.github.io>, acessada em 13 de Julho de 2014.
- NEWMAN, M.E.J.; Watts, D.J.; *Renormalization group analysis of the Small World network model; Physics Letters A, 263, 341-346, 1999.*
- NEWMAN, M. E. J.; *Models of the Small World, a Review. J. Stat. Phys. 101, 819-841, 2000.*
- NUMPY. <http://docs.scipy.org/doc/numpy/index.html>, acessada em 13 de Julho de 2014.
- SANTOS, T.D. *Conectividade algébrica em grafos aleatórios; Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Brasil, 2014.*
- TAO, T.; *Topics in random matrix theory; American Mathematical Society, 132, 2012.*
- WATTS, D.J.; Strogatz, S.H.; *Collective dynamics of Small World networks; Nature, 393, 440-442, 1998.*
- WIGNER, E.P.; *The On the distribution of the roots of certain symmetric matrices; The Annals of Mathematics, 67, 325-327, 1958.*
- WU, C.W.; *Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems; World Scientific Publishing Company, 2007.*
- ZHAN, C.; Chen, G.; Yeung, L.F.; *On the distributions of Laplacian eigenvalues versus node degrees in complex networks; Physica A, 1779-1788, 2010.*