

Dinâmica vertical de pneus: proposta de um modelo com mais de um ponto de contato

Gabriel A. Godinho*, Ricardo T. da Costa Neto

Instituto Militar de Engenharia (IME)

Praça General Tibúrcio, 80, 22290-270, Praia Vermelha, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

*godo.godinho@hotmail.com

RESUMO: Este artigo apresenta um modelo de pneu com mais de um ponto de contato, criado a partir de um modelo de $1/4$ de carro, que tem como objetivo representar de maneira mais precisa o comportamento vertical de um veículo ao trafegar por uma pista contendo obstáculos. Simulações usando o programa MatLab/Simulink® são utilizados para validar o modelo e observar a resposta do veículo ao transpor um degrau. Além dos resultados das simulações, o raciocínio matemático usado para a obtenção das equações desse novo modelo também é apresentado.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo de pneu. Dinâmica vertical. Pontos de contato. Obstáculos.

ABSTRACT: This article presents a tyre model with more than one contact point, created from a $1/4$ car model, whose objective is to represent in a more accurate way the vehicle's vertical behavior while cruising through an obstacle-laden track. Simulations made in the MatLab/Simulink® software are used to validate the model and to observe the vehicle's response while going over a step. Besides the results of the simulations, the mathematical reasoning used to obtain the equations for this new model is presented as well.

KEYWORDS: Tyre model. Vertical dynamics. Contact points. Obstacles.

1. Introdução

O objetivo desse trabalho é a criação de um modelo de dinâmica vertical para pneus que utilize mais de um ponto de contato com o piso, para representar de maneira mais precisa o comportamento de um veículo quando ele transpõe obstáculos. Os modelos já existentes apresentados por Jazar (2008), que utiliza apenas um ponto de contato, e por Tristão (2017), que utiliza múltiplos pontos de contato, servirão como base para o novo modelo. Também são realizadas simulações no programa MatLab/Simulink®

com o objetivo de avaliar o modelo obtido e seus resultados são apresentados [1][2].

Segundo Gillespe (1992), o pneu é o elemento do veículo que tem 3 funções: produzir forças longitudinais para a aceleração e para a frenagem; produzir forças laterais para se efetuarem curvas; além de suportar as cargas verticais provenientes tanto do próprio peso do veículo, quanto de irregularidades no solo. Essa última função, é estudada na dinâmica vertical [3].

A dinâmica vertical aborda os esforços que influenciam o comportamento vertical dos veículos. Tais esforços são causados pelo próprio

peso do veículo, por irregularidades no solo ou por obstáculos que o veículo é forçado a superar. O estudo dessa característica permite determinar o conforto dos ocupantes e se o veículo é capaz de transpor barreiras de maneira apropriada. Os principais subsistemas do veículo estudados nesse âmbito são a suspensão e os pneus.

A maioria dos modelos existentes para esse aspecto do veículo considera o pneu como uma massa em contato pontual com o solo. Essa aproximação não condiz com a realidade, já que, devido à natureza deformável do pneu, ele possui sempre uma área de contato com o solo e, por ser tridimensional, um obstáculo costuma entrar em contato primeiro com uma região da banda de rolagem do pneu que, naquele instante, não está em contato com o solo e já produzir esforços na direção vertical [1][3].

A imprecisão desses modelos, causada pelas hipóteses simplificadoras que ignoram os efeitos citados anteriormente, costuma ser desprezível quando se analisa um veículo que trafega na cidade ou na estrada. Contudo, quando um automóvel precisa se locomover em terreno bastante irregular ou transpor grandes obstáculos, como degraus, trincheiras e barricadas, surgem erros significativos nos resultados.

Para representar de maneira mais precisa a resposta dinâmica de um carro *off-road* ao trafegar por uma pista irregular, Tristão criou um modelo de pneus que utiliza vetores radiais e transformações de coordenadas para avaliar as deformações em toda banda de rolagem do pneu e os esforços por elas provocados [2].

O modelo apresentado neste artigo utiliza alguns desses conceitos na sua elaboração com o intuito de simular de uma forma mais acurada o comportamento de um pneu ao transpor um degrau.

2. O modelo tradicional

Os modelos existentes de dinâmica vertical usam sistemas massa-mola-amortecedor para representar o veículo. O modelo de $\frac{1}{4}$ de carro presente na **figura 1** usa um sistema de 2 graus de liberdade no qual uma massa suspensa m_s , que representa o chassi e tem como grau de liberdade seu deslocamento vertical y_s , está conectada a uma massa não suspensa m_{ns} , representando o conjunto roda-pneu e tendo como grau de liberdade seu deslocamento vertical y_{ns} , a qual, por sua vez, está conectada a uma excitação de base y_p , representativa do solo.

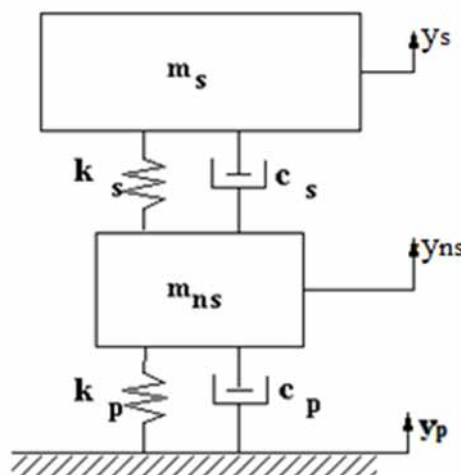


Fig. 1 – Modelo da dinâmica vertical de $\frac{1}{4}$ de carro.

As características elásticas e dissipativas da suspensão do veículo são representadas pela mola k_s e pelo amortecedor c_s . Semelhantemente, as características elásticas e dissipativas do pneu representadas pela mola e pelo amortecedor c_p .

Usando a segunda lei de Newton para calcular o somatório das forças que atuam sobre a massa suspensa [4] e adotando g como a aceleração da

gravidade, as seguintes equações, que governam a dinâmica vertical dessa massa, são obtidas.

$$m_s \ddot{y}_s = -F_{ks} - F_{cs} - m_s g \quad (1)$$

$$F_{ks} = k_s (y_s - y_{ns}) \quad (2)$$

$$F_{cs} = c_s (\dot{y}_s - \dot{y}_{ns}) \quad (3)$$

As grandezas F_{ks} e F_{cs} representam as forças geradas pela mola e pelo amortecedor, respectivamente. As diferenças $(y_s - y_{ns})$ e $(\dot{y}_s - \dot{y}_{ns})$ representam a deflexão e a taxa de deflexão dos elementos da suspensão.

É necessário lembrar que o curso das molas da suspensão de um automóvel é limitado pelos batentes. A suspensão do veículo não trabalha sob tração, ou seja, a mola ou está comprimida, ou está em seu comprimento natural, e sua compressão atinge um valor máximo quando a mola chega ao fim do curso ou entra em contato com o batente da suspensão.

Usando o mesmo raciocínio, é possível obter as equações que governam a dinâmica vertical da massa não suspensa.

$$m_{ns} \ddot{y}_{ns} = F_{ks} + F_{cs} - F_{kp} - F_{cp} - m_{ns} g \quad (4)$$

$$F_{kp} = k_p (y_{ns} - y_p) \quad (5)$$

$$F_{cp} = c_p (\dot{y}_{ns} - \dot{y}_p) \quad (6)$$

As grandezas F_{kp} e F_{cp} representam as forças geradas pela elasticidade do pneu e por seu amortecimento, respectivamente. As diferenças $(y_{ns} - y_p)$ e $(\dot{y}_{ns} - \dot{y}_p)$ representam a deflexão e a

taxa de deflexão do pneu.

De modo análogo à mola da suspensão, a deformação do pneu também é limitada. Assim como a suspensão, o pneu sofre apenas compressão. Quando a distância entre a pista e o pneu é maior que seu raio indeformado, significa que a roda se descolou do solo e, nesse caso, a única força que atua sobre ele é a força da gravidade. A compressão do pneu também possui um valor máximo, igual ao seu comprimento de flanco, que equivale ao caso em que a deformação do pneu é tão grande que o aro da roda, que é rígido, entra em contato com o solo.

No modelo descrito pelas equações acima, apenas a deformação do pneu em um ponto exatamente abaixo de seu centro de massa está sendo contabilizada. No entanto, caso haja obstáculos na pista, eles irão entrar em contato com outros pontos do pneu, gerando deformações e forças que precisam ser consideradas.

3. O modelo com mais de um ponto de contato

Os modelos mais comuns de dinâmica vertical representam, por simplificação, o contato do pneu como um único ponto. Contudo, isso não representa a realidade de uma maneira precisa. Como exemplo, tem-se o apresentado na **figura 2**, que mostra o pneu de um veículo entrando em contato com um obstáculo. Como é possível observar, uma região da banda de rodagem do pneu, que se encontra à frente da região em contato com o solo, é deformada pelo contato com o obstáculo.

Para uma simulação precisa de um veículo transpondo grandes obstáculos, é necessário considerar esse efeito durante a modelagem.



Fig. 2 – Pneu subindo um obstáculo.

Tristão propõe um modelo de múltiplos pontos de contato que usa vetores para representar as extremidades do pneu e monitorar tanto suas posições quanto suas deformações ao trafegar por uma pista irregular (figura 3). Tal modelo serve de base para a modelagem da dinâmica vertical dos pneus apresentada neste artigo [2].

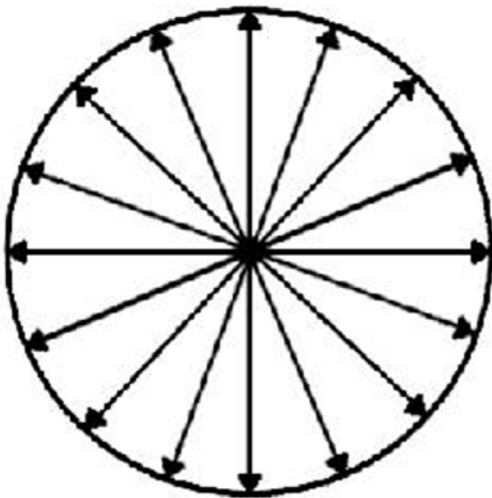


Fig. 3 – Vetores radiais no modelo de Tristão. Fonte [2]

Usando os conceitos abordados por Tristão e as fórmulas do modelo de um ponto de contato,

foi obtido o modelo de mais de um ponto de contato descrito a seguir [2].

A figura 4 ilustra o caso estudo por esse modelo, nela um pneu de raio indeformado r_i prestes a entrar em contato com um degrau de altura h . O centro do pneu está localizado nas coordenadas (x_0, y_0) , o ponto do degrau que entrará em contato com o pneu se encontra nas coordenadas (x_1, y_1) e a distância d entre esses dois pontos possui a dimensão horizontal Δx , a vertical Δy e a inclinação β .

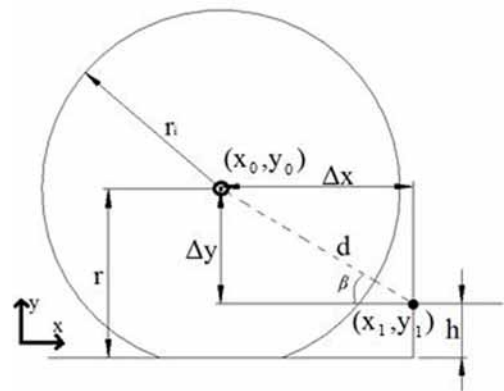


Fig. 4 – Pneu e obstáculo.

Nesse caso, as equações 1, 2 e 3 são mantidas, pois tratam apenas da massa suspensa. equação 4, no entanto, precisa ser reescrita para levar em consideração os efeitos da deformação do pneu devido ao degrau.

$$m_{ns}\ddot{y}_{ns} = F_{ks} + F_{cs} - F_{kp} - F_{cp} - m_{ns}g + F_d \sin(\beta) \quad (7)$$

$$F_d = F_{dk} + F_{dc} \quad (8)$$

Nas quais F_d é a força na direção radial do pneu causada pelo contato com o degrau e F_{dk} e F_{dc} são as parcelas elástica e dissipativa, respectivamente, dessa força, conforme ilustrado pela figura 5.

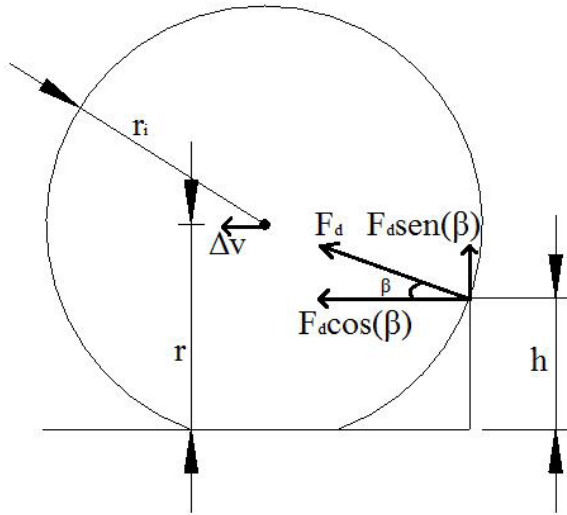


Fig. 5 – Forças e velocidades devido ao contato com o degrau.

Considerando que a altura da pista pode ser descrita em função da posição x , tal que:

$$f(x) = 0, \quad x < a \quad (9)$$

$$f(x) = h, \quad x \geq a \quad (10)$$

Onde a é a distância do degrau ao início da pista.

Sabendo a velocidade longitudinal v do veículo, a posição horizontal x_0 do centro da roda pode ser definida pela integral abaixo:

$$x_0 = \int_0^t v dt \quad (11)$$

Já a posição vertical y_0 do centro da roda é definida em função do raio indeformado r_i , do deslocamento vertical do pneu y_{ns} e da altura da pista naquele determinado ponto $f(x)$.

$$y_0 = r_i + y_{ns} + f(x_0) \quad (12)$$

Já as coordenadas do ponto do degrau que entrará em contato com a roda serão:

$$(x_1, y_1) = (a, h) \quad (13)$$

Sendo assim, a distância entre o centro do pneu e o ponto do degrau que entrará em contato com a banda de rolagem pode ser definida por:

$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (14)$$

$$\Delta x = x_0 - x_1 \quad (15)$$

$$\Delta y = y_0 - y_1 \quad (16)$$

A deformação ε surgirá no instante em que a distância d passa a ser inferior ao valor do raio indeformado e seu valor será:

$$\varepsilon = r_i - d, \quad d < r_i \quad (17)$$

Logo, os valores das parcelas elástica e dissipativa da força radial causada pela deformação que o degrau provoca no pneu serão:

$$F_{dk} = k_p \varepsilon \quad (18)$$

$$F_{dc} = c_p \dot{\varepsilon} \quad (19)$$

A componente horizontal da força F_d atua no sentido oposto ao movimento do veículo e, portanto, o desacelera. Essa desaceleração pode ser calculada usando-se a lei de Newton [5]

$$F_d \cos(\beta) = (m_{ns} + m_s)a \quad (20)$$

Sabendo-se o valor da aceleração, é possível calcular a variação na velocidade longitudinal devido às forças horizontais Δv .

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (21)$$

$$\Delta v = \int a dt \quad (22)$$

Por fim, essa variação na velocidade irá retroalimentar o valor da velocidade longitudinal.

$$v = v - \Delta v \quad (23)$$

4. Simulações e resultados

Usando as equações descritas anteriormente, foi criado um diagrama de blocos usando o *software* comercial *MatLab/Simulink*® para realizar simulações e validar o modelo proposto.

O objetivo da primeira simulação é verificar se o modelo proposto está obedecendo à lei da conservação de energia. Nela, um pneu parte com uma velocidade inicial v_i em direção a uma parede e, após colidir com ela, ele é impulsionado no sentido contrário.

Para ser validado, o modelo com mais de um ponto de contato precisa ser capaz de detectar o contato do pneu com a parede e simular sua reação além de respeitar a conservação de energia. Se a energia cinética do pneu no início da simulação for igual à energia cinética no final mais a energia dissipada no choque, isso significará que a energia mecânica do sistema foi conservada.

A segunda simulação consiste em uma comparação entre os dois modelos de dinâmica vertical. Nela, a posição vertical do centro da roda quando o veículo passa por cima de um degrau é avaliada ao longo do tempo para os dois casos.

Em cada simulação é necessário definir, a priori, os valores da função $f(x)$, que descreve a pista na qual o pneu vai trafegar.

Na primeira simulação, essa função descreve uma pista plana e uma parede com a qual o pneu se choca. Essa parede se encontra a 15 metros do início da pista e possui 1 m de altura. Portanto, o valor de $f(x)$ será dado pelas **equações 24 e 25**.

$$f(x)=0, \quad x < 15 \quad (24)$$

$$f(x)=1, \quad x \geq 15 \quad (25)$$

Na segunda simulação, essa função descreve uma pista, inicialmente plana, e um degrau que o veículo deve transpor. O degrau se encontra a 15 metros do início da pista e possui 0,1 m de altura. Esse tipo de obstáculo costuma ter um ângulo reto de inclinação em relação ao solo, no entanto, como isso pode gerar singularidades durante a diferenciação, o que interferiria com o resultado da simulação, foi imposta uma distância de 0,001 m entre a base e o topo do degrau, deixando-o com uma inclinação de 89,4 graus, o suficiente para evitar singularidades sem descaracterizar o obstáculo. Assim, as **equações 26, 27 e 28** são usadas para descrever $f(x)$ nesse caso.

$$f(x)=0, \quad x < 15 \quad (26)$$

$$f(x) = \frac{0,1(x-15)}{0,001}, \quad 15 < x < 15,001 \quad (27)$$

$$f(x) = 0,1, \quad x \geq 15,001 \quad (28)$$

4.1 Primeira simulação

Antes de se iniciar a simulação, o valor da velocidade inicial v_i do pneu é pré-determinado como igual a 3 m/s. Para a simplificação dos cálculos, os efeitos dissipativos oriundos da resistência aerodinâmica e do momento de resistência ao rolamento foram desprezados na elaboração do diagrama de blocos [6].

Outra hipótese simplificadora foi considerar nulo o amortecimento do pneu. No mundo real, o pneu possui amortecimento, logo, dissipa parte da energia que o deforma. Contudo, esse amortecimento costuma ser desprezível em relação ao coeficiente de rigidez do pneu.

Durante a simulação a velocidade longitudinal do pneu é monitorada. A **figura 6** mostra os valores que essa grandeza assume ao longo do tempo.

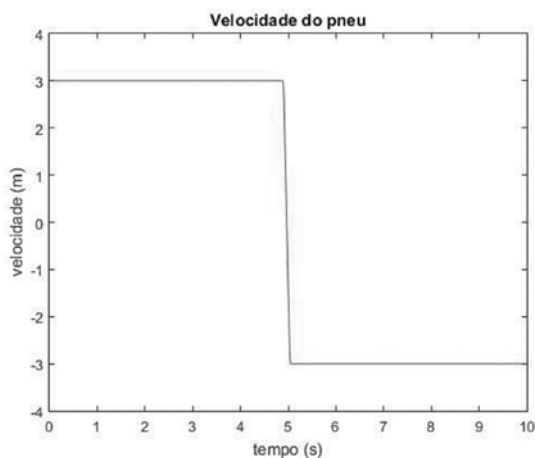


Fig. 6 – Velocidade longitudinal do pneu durante a primeira simulação.

Como apresentado na **figura 6**, a velocidade do pneu é inicialmente igual a 3 m/s até o instante em que ele entra em contato com a parede. Neste momento, a velocidade do pneu assume um valor negativo igual a -3 m/s, ou seja, a colisão

com a parede faz com que o pneu, devido às suas características elásticas, seja impulsionado no sentido contrário, conforme o esperado.

Além disso, como a característica dissipativa do pneu foi desprezada, a colisão deveria ser perfeitamente elástica, com os módulos da velocidade inicial e da velocidade final sendo iguais. O gráfico anterior mostra que o pneu se comportou de acordo com essa expectativa.

A lei da conservação de energia diz que a energia total do pneu antes do choque com a parede deve ser igual à energia total após o choque com a parede mais a energia dissipada durante a colisão.

Antes do impacto, a única energia no corpo é sua energia cinética inicial e seu valor pode ser calculado com os dados obtidos.

$$E_{inicial} = E_{ci} = \frac{m_{ns}v_i^2}{2} = 202,5 \text{ J} \quad (29)$$

Após a colisão, o veículo também possui energia cinética e, como a magnitude da velocidade final do pneu é igual à da velocidade inicial, o valor dessa energia se mantém. Caso houvesse amortecimento, a velocidade final do pneu teria um valor absoluto menor que a velocidade inicial.

$$E_{final} = E_{cf} \quad (30)$$

$$E_{cf} = \frac{m_{ns}v_f^2}{2} = 202,5 \text{ J} \quad (31)$$

Constata-se, portanto, que a energia do sistema se mantém constante, em conformidade com a lei de conservação de energia.

A capacidade do modelo de representar a reação do pneu e sua obediência à lei de conservação de energia mostram que ele é válido.

4.2 Segunda simulação

O objetivo da segunda simulação é observar as diferenças entre a resposta obtida pelo modelo de um ponto de contato e pelo modelo com mais de um ponto de contato.

Nessa simulação, um veículo trafegando a 3 m/s deverá transpor um degrau. O deslocamento vertical do pneu (y_2), a altura do centro da roda e eventuais variações na velocidade longitudinal serão avaliados.

Os parâmetros da suspensão do veículo usados na segunda simulação são descritos na **tabela 1**.

Tab. 1 – Parâmetros da suspensão.

Grandeza	Símbolo	Valor
Aceleração da gravidade	g	9,8 m/s ²
Massa suspensa	m_s	330 kg
Massa não suspensa	m_{ns}	45 kg
Rigidez da suspensão	k_s	17 kN/m
Rigidez do pneu	k_{ns}	210 kN/m
Amortecimento da suspensão	c_s	1500 kg/s
Amortecimento do pneu	c_{ns}	80 kg/s
Raio indeformado do pneu	r_i	0,33 m

Após a simulação, a análise da velocidade longitudinal do veículo mostrou que essa grandeza se manteve constante ao longo do teste quando o modelo de um ponto de contato era utilizado.

Por outro lado, quando se utilizou o modelo com mais de um ponto de contato, houve variações na velocidade longitudinal, conforme a **figura 7**.

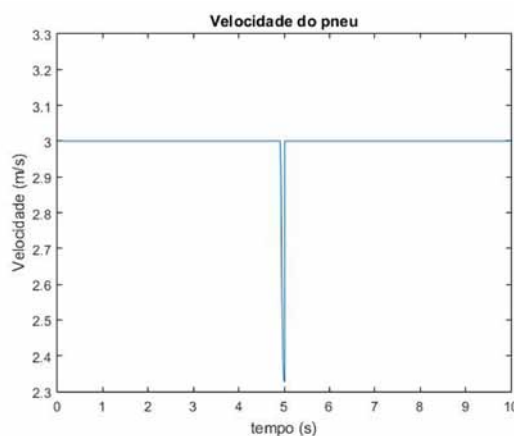


Fig. 7 – Velocidade longitudinal do pneu durante a segunda simulação.

A variação presente no gráfico corresponde ao momento em que o pneu alcança o obstáculo.

A velocidade do veículo é inicialmente constante, mas sofre uma queda brusca quando o pneu entra em contato com o degrau, já que esse exerce uma força contrária ao movimento do pneu através do segundo ponto de contato. Ao superar o degrau, essa força deixa de existir e o veículo retoma sua velocidade.

O deslocamento vertical do pneu em cada modelo foi medido e a **figura 8** apresenta seus valores durante a subida do degrau.

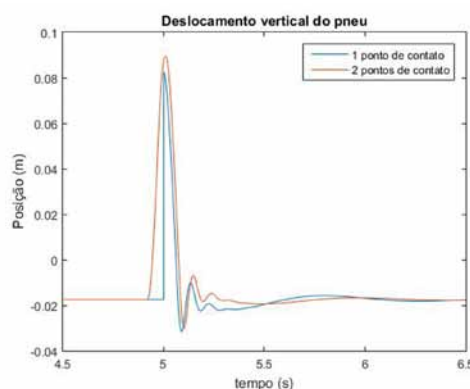


Fig. 8 – Deslocamento vertical do pneu durante a segunda simulação.

A posição zero no gráfico corresponde à altura do pneu quando seu raio não está deformado.

Nos dois modelos, antes do degrau, o pneu se encontra comprimido pelo próprio peso, por isso a posição negativa. Ao chegar no degrau ($t \approx 5$ s), ele sofre uma perturbação e atinge valores positivos, indicando que o pneu se descolou do solo. A força da gravidade o traz de volta ao solo e ele se estabiliza progressivamente até retornar à mesma posição vertical do início do gráfico.

Quando se observa o gráfico do modelo com um ponto de contato, percebe-se que o pneu atinge o degrau exatamente quando $t=5$ s e ele se desloca instantaneamente para cima.

Já no segundo modelo, o contato acontece antes de $t=5$ s e o pneu se desloca progressivamente para a vertical. Isso ocorre porque um ponto do pneu a frente do centro entra em contato com o obstáculo antes do centro e esse contato já produz forças verticais no pneu.

A altura do centro da roda em relação a um referencial global durante a transposição do degrau também foi avaliada em cada modelo e seus valores se encontram no gráfico da **figura 9**.

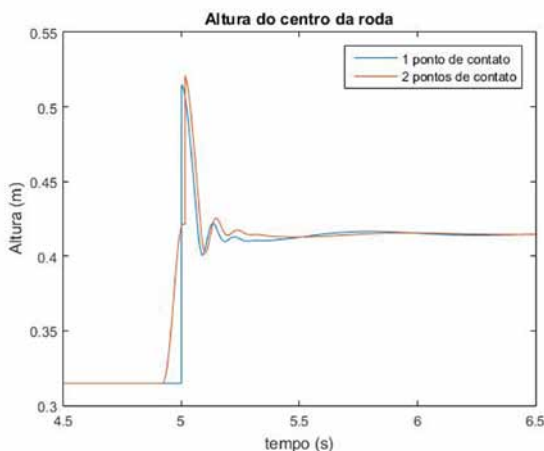


Fig. 9 – Altura do centro da roda durante a segunda simulação.

Nos dois métodos a altura da roda é inicialmente constante e de valor igual ao raio deformado do pneu. Como no gráfico da **figura 8**, a roda é deslocada para cima devido ao contato com o degrau e se descola do solo. No fim, a altura oscila até se estabilizar num valor 0,1 m mais alto que a altura inicial, o que significa que o veículo se encontra em cima do degrau.

Analisando-se o gráfico do modelo com um ponto de contato, é possível que contato com o degrau ocorre exatamente quando $t=5$ s e com isso a roda é deslocada instantaneamente para cima, da mesma forma que o gráfico na **figura 8**.

O gráfico do modelo com um ponto de contato também se comporta igual ao da **figura 8**. Como o contato acontece antes de $t=5$ s o centro da roda se desloca progressivamente para a vertical. Isso mostra mais uma vez que neste modelo um ponto do pneu a frente do centro da roda entra em contato com o obstáculo primeiro, é deformado e essa deformação produz forças que impulsionam o pneu para cima.

5. Conclusão

O objetivo desse trabalho, a criação e a validação de um modelo de dinâmica vertical para pneus que utilizasse mais de um ponto de contato, foi atingido.

Os resultados obtidos através das simulações comprovam que o modelo proposto não só é capaz de descrever corretamente a resposta do pneu a obstáculos na pista, como que ele também respeita à lei de conservação de energia.

Com esse modelo, a reação dos veículos à obstáculos na pista pode ser melhor representada, o que permite que uma simulação seja capaz de determinar se um veículo é capaz ou não de

transpor um obstáculo e avaliar os esforços que atuam sobre ele durante essa manobra, sem a necessidade de onerosos testes de campo.

Espera-se, em trabalhos futuros, integrar

o modelo aqui desenvolvido com um modelo de dinâmica longitudinal de veículos para que ambos trabalhem juntos além de adaptá-lo para que seja usado em um modelo de $\frac{1}{2}$ carro.

Referências Bibliográficas

- [1] Jazar, Reza N., *Vehicle Dynamics: Theory and Application*, Springer, 2008, ISBN 978-0-387-74243-4.
- [2] Tristão, M. W.; Speranza Neto, M.; da Costa Neto, R. T., *Simulação da Dinâmica de um Veículo BAJA SAE Modelado por Diagrama de Blocos*, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2017.
- [3] Gillespe, Thomas D., *Fundamentals of Vehicle Dynamics*, Society of Automotive Engineers, 1992, ISBN 1-56091-199-9.
- [4] Rao, Singiresu, *Vibrações Mecânicas 4ª edição*, Pearson, 2009, ISBN 978-85-7605-200-5.
- [5] Beer, F.P., Johnston Jr., E. R. e Cornwell, P. J., *Mecânica Vetorial para Engenheiros – Dinâmica*, 9ª edição, McGraw-Hill, 2012, ISBN: 978-0-0772-4916-8
- [6] Wong, J. Y., *Theory of Ground Vehicles*, John Wiley & Sons, 2008, ISBN 0-471- 35461-9.