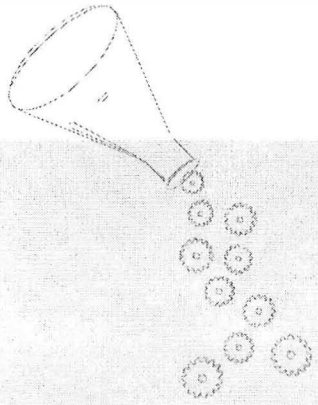

# Caos em Sistemas Mecânicos

*Marcelo Amorim Savi**


## RESUMO

***Os sistemas não-lineares são passíveis de apresentar movimento caótico. Modernamente, o caos é entendido como o comportamento estocástico de sistemas determinísticos. Este trabalho apresenta uma revisão sobre as principais características do caos em sistemas mecânicos: forte dependência das condições iniciais, ferradura de Smale, atrator estranho, conjunto de Cantor, dimensão fractal, fronteira fractal de bacias de atração e expoentes de Lyapunov.***


## 1. INTRODUÇÃO

Os modelos não-lineares, de um modo geral, descrevem melhor os fenômenos físicos. Contudo, as dificuldades inerentes ao estudo dos problemas não-lineares, e o sucesso da mecânica linear, incentivaram, cada vez mais, o estudo de modelos lineares e bem comportados, fazendo com que os modelos não-lineares fossem evitados por muitas vezes.

*Euler* explicita bem a dificuldade de tratar problemas não-lineares quando fala sobre o movimento de fluidos: *"Se não nos é permitido penetrar a um conhecimento completo sobre o movimento dos fluidos, não é à mecânica e à insuficiência dos princípios conhecidos do movimento que se deve atribuir isto, mas à própria análise que aqui nos abandona".*

O estudo de modelos lineares criou paradigmas que se enraizaram na tradição histórica. O determinismo estrito é um bom exemplo disto e pode ser bem representado pelo pensamento de *Laplace* que diz: *"Devemos ver o estado presente do universo como o efeito do seu estado anterior, e como a causa daquele que virá. Uma inteligência que, em qualquer instante dado, soubesse todas as forças pela qual o mundo natural se move e a posição*

*Instituto Militar de Engenharia – Departamento de Engenharia Mecânica e de Materiais – 22.290-270 – Rio de Janeiro – RJ

*de cada uma de suas partes componentes, e que tivesse também a capacidade de submeter todos estes dados à análise matemática, poderia encompassar na mesma fórmula os movimentos dos maiores objetos do universo e aqueles dos menores átomos; nada seria incerto para ele, e o futuro, assim como o passado, estaria presente diante de seus olhos".*

Foi *Poincaré*, em fins do século XIX, que falou claramente sobre o acaso se contrapondo ao determinismo estrito de *Laplace*: *"Uma causa muito diminuta, que nos escapa, determina um efeito considerável, que não podemos deixar de ver, e então dizemos que este efeito é devido ao acaso. Se pudéssemos conhecer exatamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, seríamos capazes de prever exatamente a situação deste mesmo universo no instante subseqüente. Mas mesmo quando as leis naturais já não tivessem mais segredo para nós, só poderíamos conhecer a situação inicial aproximadamente. Se isto nos permite antecipar a situação subseqüente com o mesmo grau de aproximação, ficamos satisfeitos, dizemos que o fenômeno foi previsto, que é governado por leis. Mas nem sempre isto ocorre; pode acontecer que diferenças mínimas nas condições iniciais produzam diferenças muito grandes no fenômeno final; um erro mínimo nas primeiras produziria um erro enorme neste último. A previsão torna-se impossível e temos o fenômeno do acaso".*

Em 1963, *Lorenz* desenvolvia estudos sobre problemas atmosféricos, quando se deparou com o acaso descrito por *Poincaré*. Contando com o auxílio de um computador, Lorenz tratava o modelo de Rayleigh-Bernard para convecção de fluidos, e observou que uma pequena variação nas condições iniciais poderia acarretar grandes diferenças na evolução do sistema. Este fato ficou conhecido como *efeito borboleta*, como uma alusão de que se uma borboleta batesse suas asas em algum lugar do planeta, ela poderia alterar a resposta do sistema dinâmico. Tratava-se de um sistema totalmente determinístico cujos resultados poderiam ser aleatórios.

Este trabalho trouxe *"a assustadora compreensão de que equações matemáticas simples podiam servir de modelo para sistemas tão violentos" (Gleick, 1987)*. Iniciava-se aí o moderno estudo do *caos*, cujas idéias básicas haviam sido alcançadas por *Poincaré*. O caos é uma das inúmeras possibilidades de comportamento de um sistema não-linear.

A idéia de que a natureza é bem comportada, que domina o senso comum, é uma conseqüência da exagerada utilização de modelos lineares, o que limitou o espectro de análise por muitos anos, eliminando uma incrível variedade de comportamentos.

A ciência moderna tende a atribuir o nome *caos* ao comportamento estocástico de sistemas determinísticos *(Stewart, 1991)*. Cabe estabelecer a distinção entre fenômenos aleatórios e caóticos. Os fenômenos aleatórios dizem respeito a sistemas não-determinísticos. Ou seja, o sistema apresenta uma resposta aleatória como uma conseqüência de uma entrada aleatória *(Meirovitch, 1986)*. Por outro lado, os fenômenos caóticos são determinísticos. Assim, para uma entrada totalmente conhecida e determinada surge uma resposta aleatória.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar alguns conceitos básicos relacionados ao *caos*. Inicialmente apresentam-se alguns sistemas físicos simples descritos por modelos não-lineares. A seguir tratam-se algumas características apresentadas em uma resposta caótica: comportamento caótico, ferradura de Smale, expoentes de Lyapunov.

## 2. SISTEMAS FÍSICOS NÃO-LINEARES

Esta seção apresenta alguns exemplos de sistemas físicos descritos através de modelos não-lineares. Apesar da simplicidade dos modelos apresentados, cada um deles possui uma dinâmica muito rica, passível de exibir um movimento caótico.

Considere, inicialmente, o movimento do pêndulo (Figura 1). A descrição deste movimento pode ser obtida fazendo o equilíbrio das forças que atuam na massa $m$. Assumindo um amortecimento viscoso linear e um forçamento periódico, obtém-se a seguinte equação do movimento,

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + w_0^2 sen(\theta) = \mu\, sen(\Omega t) \qquad (1)$$

onde $\theta$ representa a posição do pêndulo e $\alpha$ é uma constante. $\omega_0$ está associado à freqüência natural do sistema. $\mu$ e $\Omega$ representam a amplitude e a freqüência do forçamento periódico, respectivamente. O ponto significa a derivada em relação ao tempo, $t$.

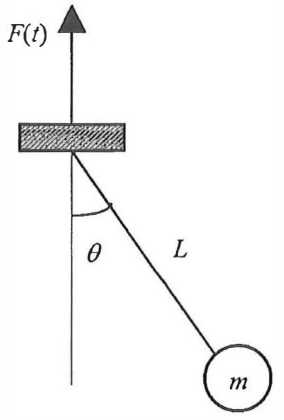


*Figura 1: Pêndulo simples.*

A consideração de que o movimento do pêndulo ocorre com pequenos ângulos, (sen$(\theta) \approx \theta$), simplifica consideravelmente a equação do movimento, tornando-a linear. Esta aproximação, usualmente aceita, modifica totalmente a dinâmica do sistema.

Outro exemplo a ser considerado é um oscilador massa-mola-amortecedor, submetido a um forçamento externo, $F(t)$, onde a força de restituição da mola é dada por uma função do tipo $K(u)$ enquanto o amortecimento é dado por uma função $C(u,\dot{u})$ (Figura 2).

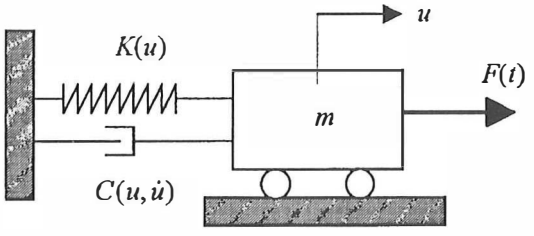


*Figura 2: Oscilador massa-mola-amortecedor.*

Fazendo o balanço de forças, obtém-se a seguinte equação do movimento,

$$m\ddot{u} + C(u,u) + K(\dot{u}) = F(t) \qquad (2)$$

onde $u$ representa o deslocamento da massa $m$.

Considere então, um oscilador com uma força de restituição com não-linearidade cúbica e um amortecimento viscoso linear. A equação do movimento de um sistema deste tipo, admitindo um forçamento periódico, é mostrada a seguir,

$$\ddot{u} + \alpha\dot{u} + \omega_0^2 u + \beta u^3 = \mu \text{ sen } (\Omega t). \tag{3}$$

Esta é a *equação de Duffing* usada para descrever uma série de fenômenos físicos importantes, dentre os quais deve-se destacar a *viga de Moon & Holmes*, que trata a flambagem de uma viga elástica submetida à ação de forças magnéticas *(Moon, 1980)* – (Figura 3).

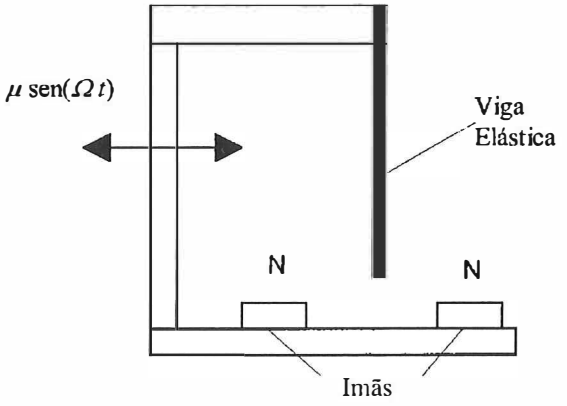


*Figura 3: Viga de Moon & Holmes*

Considere agora uma força de restituição elástica linear e um amortecimento não-linear. A seguinte equação do movimento pode ser escrita.

$$\ddot{u} + \alpha(1 - \beta u^2)\dot{u} + \omega_0^2 u = \mu \text{ sen}(\Omega t). \tag{4}$$

Esta é a *equação de Van der Pol*, originalmente obtida para descrever o comportamento de um circuito elétrico com uma válvula tríodo, e uma resistência cujas propriedades variam de acordo com a corrente elétrica. O oscilador mostrado pode ser visto como o análogo mecânico deste circuito. A principal característica deste oscilador é que ele dissipa energia para grandes amplitudes enquanto, para pequenas amplitudes, absorve energia. Este sistema pode ser associado à alguns exemplos físicos cujo comportamento pode ser entendido considerando um sistema massa-mola que desliza sobre uma esteira que move-se com velocidade $v_0$ *(Nayfeh & Mook, 1979)* – (Figura 4).

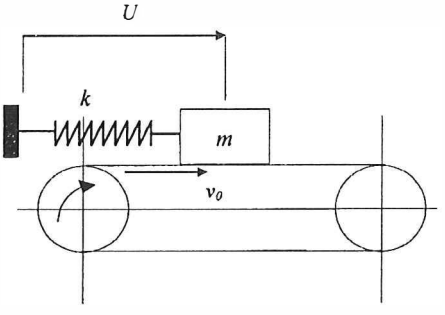


*Figura 4: Sistema auto-excitado.*

Com o objetivo de estudar fenômenos atmosféricos, *Lorenz (1963)* utilizou uma versão simplificada do modelo de *Rayleigh-Bernard* para convecção natural. O problema considera duas chapas com temperaturas diferentes, separadas por um fluido. A temperatura da chapa superior é menor do que a da inferior (Figura 5). O gradiente de temperatura induz o fluido a se movimentar de forma ascendente enquanto o efeito da gravidade induz o fluido a se movimentar de forma descendente. A interação entre estes dois fatores gera fenômenos bastante interessantes. Para descrever este fenômeno, é necessário considerar as equações de Navier-Stokes, da continuidade e da condução de calor. A simplificação proposta por Lorenz *(Schuster, 1989)* está apresentada a seguir,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x) \\ \dot{y} &= \beta x - y - xz, \\ \dot{z} &= \gamma z - xy \end{aligned} \tag{5}$$

onde $x$ é proporcional a velocidade de circulação do fluido, $y$ caracteriza a diferença de temperatura entre elementos de fluidos ascendentes e descendentes e $z$ é proporcional aos desvios da temperatura vertical desde o valor de equilíbrio. $\alpha$ é um parâmetro associado ao Número de Prandtl, que relaciona viscosidade e condutividade térmica, $\beta$ está relacionado com o gradiente de temperatura enquanto $\gamma$ é um fator geométrico.

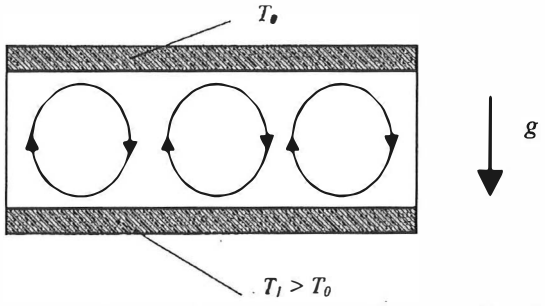


*Figura 5: Modelo de Lorenz para Convecção Natural.*

## 3. COMPORTAMENTO CAÓTICO

Um sistema dinâmico pode ser expresso da seguinte forma,

$$\dot{x} = f(x),\ x \in R^n. \tag{6}$$

Isto significa que um campo vetorial, $x$, está sendo submetido a uma transformação imposta por $f$. O espaço das variáveis dependentes do sistema, $x$, é definido como o *espaço fase (Wiggins, 1990)*. Um *ponto de equilíbrio* ou *ponto fixo* de um sistema dinâmico é definido como sendo o ponto em que o sistema pode permanecer estacionário, ou seja, um ponto onde a solução não varia com o tempo. Assim, se $\bar{x} \in R^n$ for um ponto de equilíbrio do sistema dinâmico, então $f(\bar{x}) = 0$ *(Guckenheimer & Holmes, 1983)*.

Considere o oscilador de Duffing, cuja equação do movimento está apresentada em (3). Escrevendo na forma do sistema dinâmico proposto, faz-se $x = u$ e $y = \dot{u}$, de onde chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \alpha y - \omega_0^2 x - \beta x^3 + \mu\, sen(\Omega t) \end{aligned} \tag{7}$$

Os parâmetros do sistema definem a natureza do comportamento. Por exemplo, considere $\alpha = 0.05$, $\omega_0^2 = -0.2$, $\beta = 1$, $\Omega = 1$. Variando-se o valor do parâmetro de forçamento $\mu$, pode-se avaliar quais as excitações mais críticas. A resposta do sistema será observada de duas maneiras. Na primeira, considera-se a evolução da resposta do sistema no tempo. Na segunda, olha-se para o espaço fase. Tomando-se $\mu = 4$, tem-se um comportamento periódico, bem comportado, que se repete com o tempo, conforme mostra a Figura 6a. A Figura 6b caracteriza este comportamento através de uma curva fechada. Por outro lado, tomando-se $\mu = 7.5$, o sistema passa a apresentar um comportamento não-periódico, difícil de ser previsto. A Figura 7 mostra esta não-periodicidade. Na Figura 7b, este comportamento é representado através de uma curva que nunca se fecha. A não-periodicidade e conseqüente imprevisibilidade, caracterizam o *caos*.

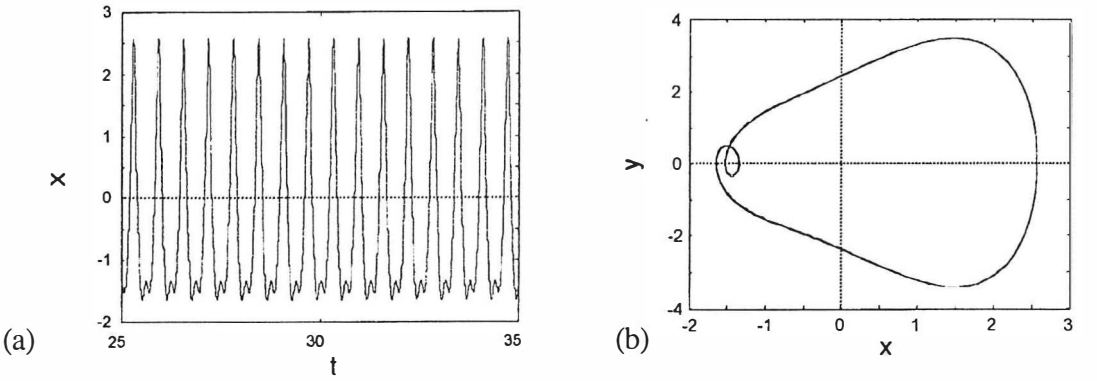


Figura 6: Resposta periódica. (a) Evolução no tempo; (b) Espaço fase.

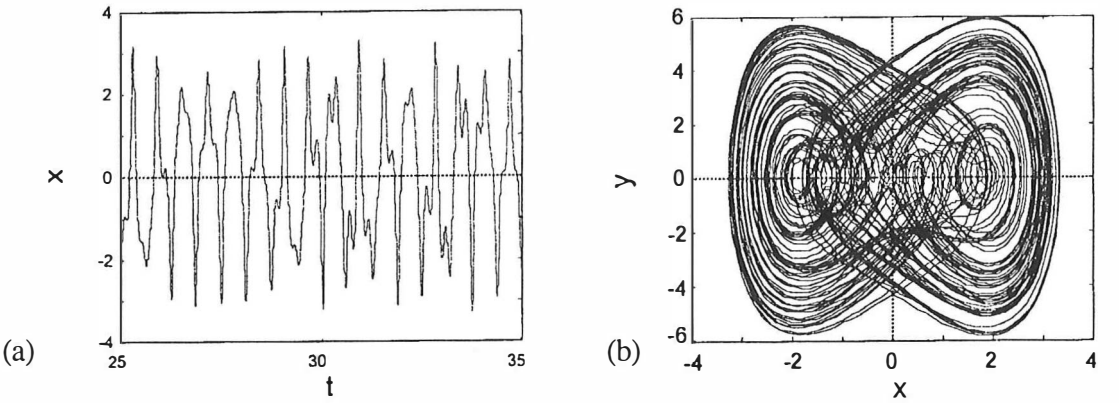


Figura 7: Resposta caótica. (a) Evolução no tempo; (b) Espaço fase.

A *seção de Poincaré* elimina uma dimensão do sistema permitindo que se transforme um sistema contínuo no tempo em um mapeamento discreto *(Thompsom & Stewart, 1986)*. Uma maneira de se definir a seção de Poincaré é observar uma dada órbita apenas em pontos discretos, estroboscopicamente tomados em uma superfície (Figura 8).

Um outro procedimento útil para a análise do comportamento caótico é o *diagrama de bifurcação*. O termo bifurcação foi usado pela primeira vez por Poincaré para expressar uma divisão das soluções de equilíbrio. De uma maneira mais geral, entende-se bifurcação como uma mudança qualitativa na estrutura de uma solução, como conseqüência da variação dos parâmetros do sistema *(Wiggins, 1990)*. O diagrama de bifurcação apresenta a distribuição estroboscópica da resposta do sistema a partir de uma variação lenta de um dado parâmetro *(Thompsom & Stewart, 1986)*. Desta forma, é possível ter-se uma visão global sobre os efeitos da variação deste parâmetro na resposta. A Figura 9 apresenta o diagrama de bifurcação para o oscilador de Duffing. O parâmetro que está sendo variado é a amplitude do forçamento periódico, $\mu$. Deve-se observar que existem regiões onde o parâmetro $\mu$ está associado a um número finito de pontos, assim como regiões onde ele está associado a uma nuvem de pontos. O comportamento caótico ocorre nas regiões onde existe uma nuvem de pontos.

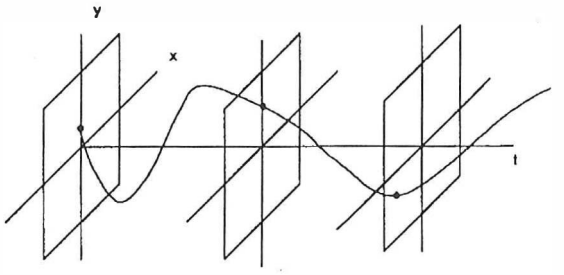


Figura 8: Seção de Poincaré

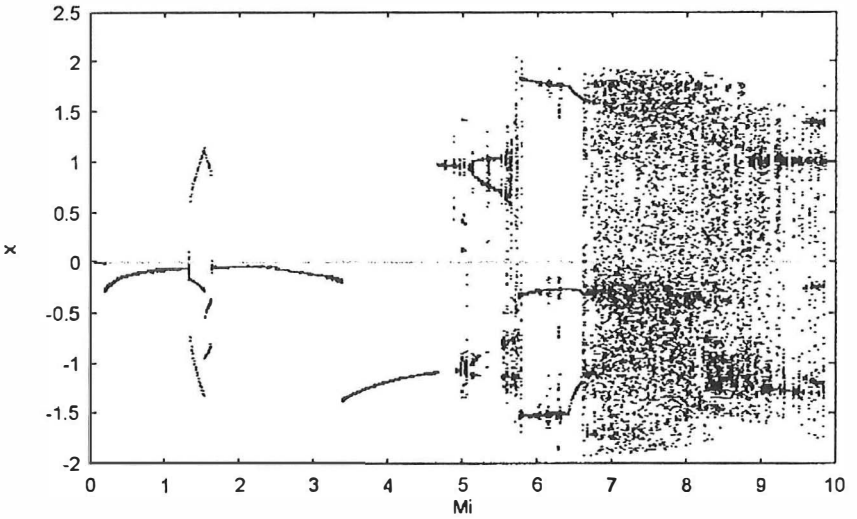


Figura 9: Diagrama de bifurcação mostrando o deslocamento sob a variação da amplitude de forçamento.

## 4. FERRADURA DE SMALE

Um sistema dinâmico pode ser entendido como um campo vetorial, $x$, que está sendo submetido a uma transformação imposta por uma função $f$, $\dot{x} = f(x,t)$. Pode-se olhar para estas transformações do ponto de vista geométrico, visando avaliar a maneira como uma forma específica é transformada pela função $f$, na medida que o tempo evolui. Desta forma, faz-se uma análise qualitativa do sistema dinâmico objetivando entender o comportamento global do sistema. A base para esta análise é a *topologia*, que pode ser entendida como a ciência que trata as transformações contínuas e as propriedades geométricas de alguns objetos sob a ação de transformações *(Singer & Thorpe, 1967)*.

Considere então, um quadrado unitário, $D$, submetido à ação da função $f$ que o transforma de tal forma que contrai em uma direção enquanto o expande em outra, deformando $D$ de modo que ele se mantenha no espaço original. Assim, $f$ transforma $D$, conforme mostra a Figura 10.

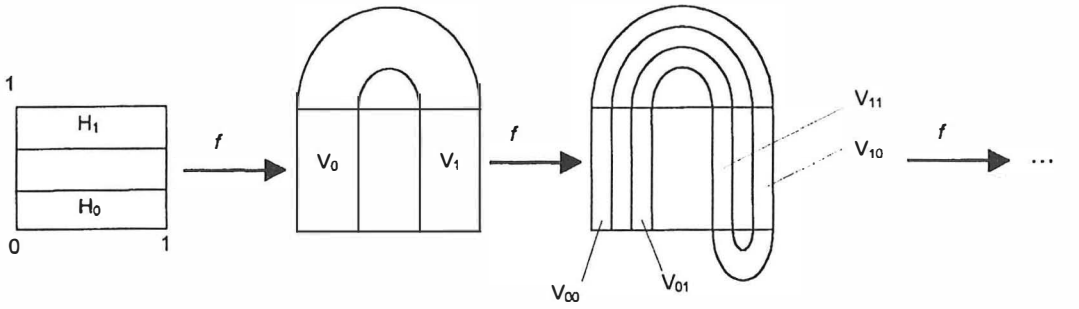


Figura 10: Seqüência de transformações impostas ao quadrado D pela função f.

De maneira análoga, pode-se pensar em uma transformação inversa, de tal forma que a contração e a expansão de $D$ seriam tomadas de forma diferente, conforme mostra a Figura 11.

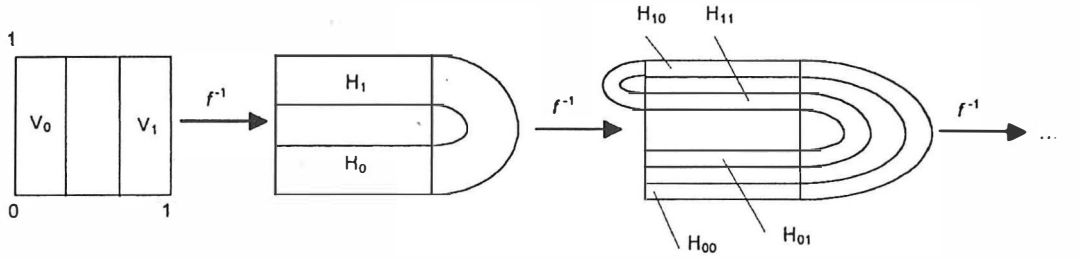


Figura 11: Seqüência de transformações impostas ao quadrado D pela função inversa de f.

No limite, a interseção das transformações impostas por $f$ (linhas verticais – Figura 10) com aquelas impostas por $f^{-1}$ (linhas horizontais – Figura 11), formam um conjunto

invariante de pontos *(Wiggins, 1990; Guckenheimer & Holmes, 1983)*. Este conjunto possui a forma de um *conjunto de Cantor* que é fechado e totalmente desconexo, possuindo uma infinidade incontável de pontos *(Moon, 1992)*. Estas transformações implicam que, a um ponto qualquer de $D$, $p$, pode-se associar uma vizinhança, $\varepsilon$, que pode ser infinitamente pequena, e onde pode-se escolher um outro ponto qualquer, $\tilde{p}$. Após a função $f$ atuar um número finito de vezes, pode-se observar que os pontos $p$ e $\tilde{p}$ estão separados de uma distância finita. Diz-se então que o sistema possui *forte dependência das condições iniciais (Wiggins, 1988)*. Esta propriedade caracteriza o comportamento caótico de um sistema dinâmico. Trata-se do *efeito borboleta*, mencionado por *Lorenz*, e das *causas muito diminutas*, enunciadas por *Poincaré*, para caracterizar a imprevisibilidade dos sistemas com comportamento caótico.

A forma de ferradura, assumida pelo quadrado unitário após uma transformação imposta por $f$, é que identifica o que se chama de *ferradura de Smale*. A existência da ferradura de Smale é uma das características de um sistema dinâmico que experimenta um movimento caótico. Holisticamente, o processo de formação desta ferradura tem sido visualizada como a *transformação do padeiro*, onde associa-se o quadrado unitário, $D$, à massa de pão que é preparada a partir de movimentos de contração-expansão-dobramento *(Gleick, 1987; Stewart, 1991)*.

O movimento caótico de um sistema dinâmico pode ser caracterizado pela existência da ferradura de Smale. Assim, sob determinadas condições, a função $f$ irá transformar o sistema de forma que existirá, em direções distintas, uma expansão, uma contração e uma deformação (ou dobramento). Esta constatação impõe que um sistema dinâmico necessita de pelo menos 3 dimensões para exibir um comportamento caótico *(Wiggins, 1990; Guckenheimer & Holmes, 1983)*.

De forma rigorosa, a existência da ferradura é uma condição necessária, mas não suficiente, para a existência do caos. A ferradura de Smale define o mecanismo de formação de uma estrutura *fractal*, que é o *conjunto de Cantor (Moon, 1992)*. A Figura 12 mostra um caso típico da obtenção do conjunto a partir de um segmento de reta unitário. A regra para a construção do conjunto é dividir indefinidamente o segmento de reta em três partes, onde duas permanecem e uma é desconsiderada.

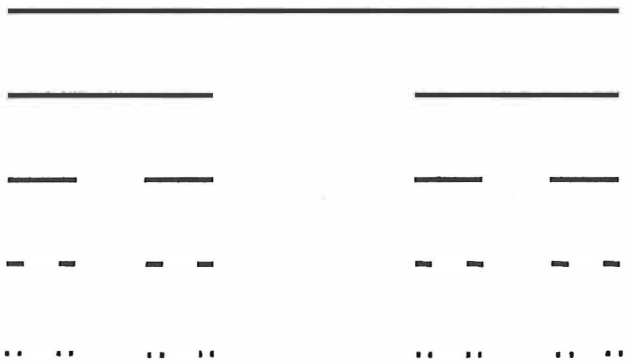

Figura 12: Conjunto de Cantor obtido a partir de um segmento de reta unitário.

O conjunto de Cantor possui uma estrutura com *auto-similaridade* como uma conseqüência de sua lei de formação *(Barnsley, 1988)*. A auto-similaridade implica que, se uma parte do conjunto for ampliada, esta será idêntica ao conjunto original. Isto proporciona uma natureza fracionária para a estrutura do conjunto uma vez que o segmento de reta original será substituído por um conjunto de pontos que jamais ocuparão toda a dimensão original (1-Dim), mas que também jamais terá uma dimensão nula. Diz-se que o conjunto possui uma natureza *fractal*, como uma alusão ao termo fracionário.

*Atrator* é o conjunto limite para o qual se converge na medida em que o tempo evolui. Existem atratores de diversas dimensões. Por exemplo, um único ponto representa um atrator de dimensão zero, enquanto uma linha, é um atrator de dimensão 1. O comportamento caótico apresenta o que se chama *atrator estranho* que possui uma dimensão *fractal* ou *fracionária (Wiggins, 1990; Guckenheimer & Holmes, 1983)*. Existem muitas formas para se quantificar a dimensão de um sistema dinâmico. *Farmer et al. (1983)* apresentam uma revisão sobre as principais formas. O *método da capacidade de Komolgorov* ou *método das caixas* consiste em determinar quantos cubos de lado $\varepsilon$, ou esferas de raio $\varepsilon$, $N(\varepsilon)$, são necessários para conter todo o conjunto de pontos. Assim, se $\varepsilon$ variar, o número de cubos irá variar com a seguinte relação *(Mullin, 1993)*:

$$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^D}. \tag{8}$$

A definição da dimensão de um conjunto pode, então, ser feita da seguinte forma,

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log[N(\varepsilon)]}{\log(1/\varepsilon)} \tag{9}$$

A Figura 13 apresenta a seção de Poincaré para o oscilador de Duffing quando $\mu = 7.5$. A resposta apresenta um atrator estranho com dimensão fractal, $D = 1.73$, o que significa que está entre 1, que seria um segmento de reta, e 2, o plano. O atrator possui uma estrutura lamelar que tende a se repetir.

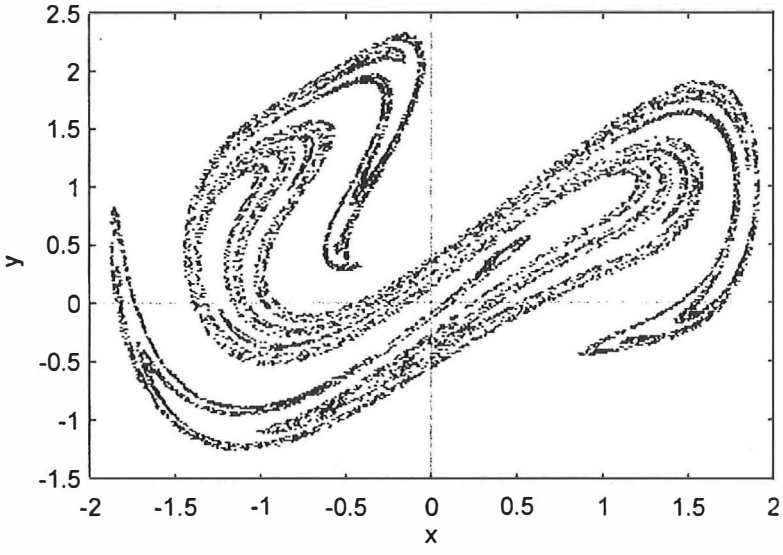


*Figura 13: Seção de Poincaré do movimento caótico: Atrator Estranho.*

A presença da estrutura fractal no sistema dinâmico, apesar de não estar necessariamente associada ao caos, pode estar associada a imprevisibilidade no sentido de provocar uma forte dependência das condições iniciais. Isto estaria associado a fronteira fractal de uma *bacia de atração* de um dado *ponto de equilíbrio*. Um atrator captura todas as órbitas que se iniciem na sua bacia de atração. Se a fronteira de dois atratores é suave, isto caracteriza duas regiões distintas que podem ser bem definidas. Se por outro lado, a fronteira for fractal, isto significa que dois pontos indefinidamente próximos podem levar a pontos de equilíbrio distintos, o que torna impossível prever a evolução do sistema *(Moon, 1992)*.

## 5. EXPOENTES DE LYAPUNOV

A forte dependência das condições iniciais, característica fundamental dos sistemas caóticos, pode ser quantificada através dos *expoentes de Lyapunov*, que definem a média da razão exponencial em que se diverge da vizinhança de uma dada trajetória. A definição deste parâmetro é de essencial importância na caracterização do caos, sendo um critério totalmente aceito *(Kapitaniak, 1991)*.

Considere uma trajetória do sistema dinâmico, que evolui a partir de uma condição inicial. Considere também uma vizinhança desta trajetória, que pode ser definida por uma esfera de diâmetro $d_0$. De cada ponto desta esfera, partirá uma nova trajetória e o conjunto de todas as trajetórias possíveis formará, em cada tempo $t$, esferas deformadas. Deseja-se avaliar como duas trajetórias, suficientemente próximas, divergem uma da outra na medida que o sistema evolui. Em outras palavras, deseja-se avaliar como a esfera inicial se comporta na medida que o tempo evolui (Figura 14).

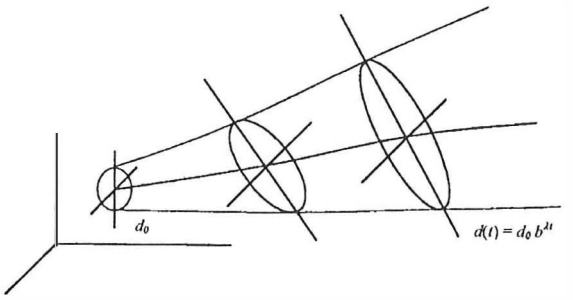


Figura 14: Avaliação dos expoentes de Lyapunov.

A variação do diâmetro desta esfera pode ser expressa a partir da seguinte expressão,

$$d(t) = d_0 b^{\lambda t}, \tag{10}$$

onde $b$ é uma base de referência. Se o expoente $\lambda$ for negativo ou nulo, as trajetórias não divergem. Se por outro lado, $\lambda$ for positivo, indica que as trajetórias divergem, caracterizando o caos.

Algoritmos próprios devem ser considerados para avaliar os exponentes de Lyapunov *(Wolf et al., 1985; Parker & Chua, 1989)*. A divergência de uma trajetória caótica é localmente exponencial. Todavia, uma distância $d$ desta trajetória não deve ir para infinito uma vez que ela representa um sistema físico. Desta forma, para avaliar a média desta divergência das trajetórias, deve-se tomar uma média do crescimento exponencial em vários pontos sobre a trajetória. Assim, quando a distância $d(t)$ torna-se muito grande, define-se um novo $d_0(t)$ para reavaliar a divergência (Figura 15). Com isso, é possível definir uma média capaz de medir a divergência.

Neste contexto, definem-se os expoentes de Lyapunov da seguinte forma,

$$\lambda = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^{n} \log_b \left( \frac{d(t_k)}{d_0(t_{k-1})} \right). \qquad (11)$$

Voltando ao oscilador de Duffing, pode-se observar que os expoentes convergem para um valor específico. Como o sistema possui dimensão 2, o espectro de Lyapunov é composto de dois expoentes, $\lambda_1$ e $\lambda_2$. No caso de um comportamento bem comportado ($\mu$ = 4), os dois expoentes são negativos (Figura 16a). Quando o sistema apresenta comportamento caótico ($\mu$ = 7.5), um expoente será positivo (Figura 16b).

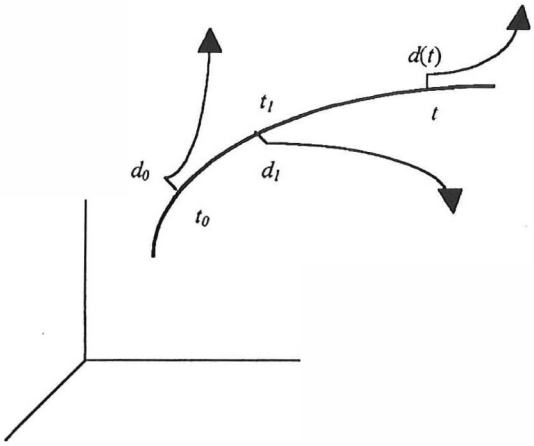


Figura 15: Cálculo dos expoentes de Lyapunov.

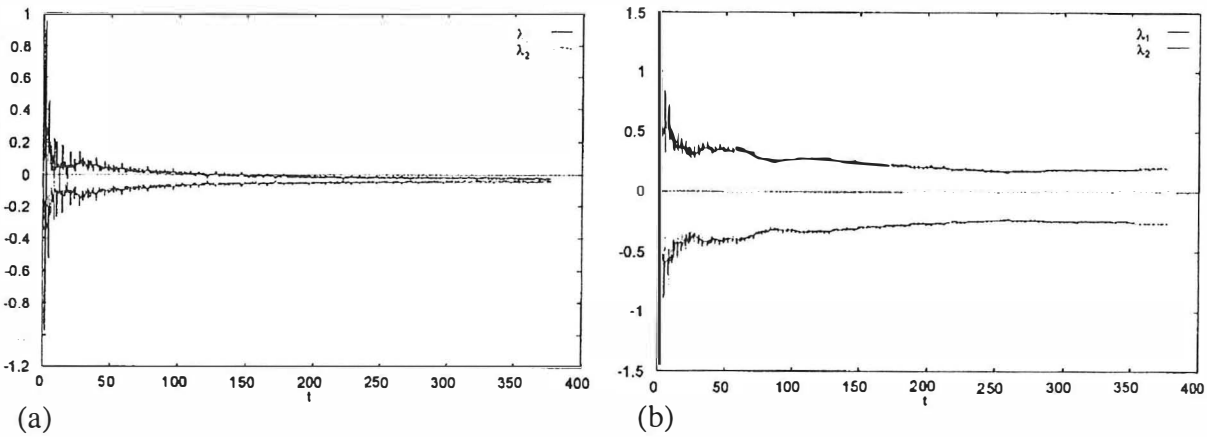


Figura 16: Evolução no tempo dos expoentes de Lyapunov.
(a) Movimento periódico; (b) Movimento caótico.

A partir do espectro de Lyapunov, é possível formular um procedimento que avalie a dimensão do atrator. Considere o espectro de Lyapunov, ordenado de forma crescente. A dimensão de Lyapunov é definida da seguinte forma *(Wolf et al., 1983):*

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \tag{12}$$

onde $j$ é definido a partir das seguintes condições,

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0 \tag{13}$$

## 6. CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou uma revisão sobre as principais características do *caos* em sistemas mecânicos. Para que um sistema dinâmico apresente uma resposta caótica é necessário que ele possua características *não-lineares.* Neste caso, dependendo dos parâmetros deste sistema, ele pode responder caoticamente. Discutiu-se aqui que o caos possui *forte dependência das condições iniciais.* Além disso, uma resposta caótica deve estar associada a existência da *ferradura de Smale,* o que caracteriza a presença de uma estrutura *fractal.* Como conseqüência desta condição, o sistema dinâmico deve possuir dimensão maior ou igual a 3 para que possa experimentar o movimento caótico. A resposta caótica possui ainda um *atrator estranho,* do tipo de um *conjunto de Cantor,* com *dimensão fractal.* Os *expoentes de Lyapunov* constituem outra forma para se quantificar o caos. Quando um sistema apresenta resposta caótica, pelo menos um expoente do espectro de Lyapunov deve ser positivo. Isto significa que duas trajetórias, suficientemente próximas, divergem exponencialmente na medida que o tempo evolui.

## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARGYRIS, J. (1991), "χαος: An Adventure in Chaos", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* 91, pp. 997-1091.

BARNSLEY, M. (1988), *"Fractals Everywhere"*, Academic Press.

FARMER, J. D., OTT, E. & YORKE, J. A. (1983), "The Dimension of Chaotic Attractors", *Physica 7D,* pp. 153-180.

GLEICK, J. (1987), *"Caos"*, Campus, Rio de Janeiro.

GREBOGI, C., OTT, E. & YORKE, J. A. (1983), "Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors, and Transient Chaos", *Physica 7D,* pp. 181-200.

GUCKENHEIMER, J. & HOLMES, P. (1983), *"Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields"*, Springer-Verlag, New York.

HAKEN, H. (1985), "Order in Chaos", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.52, pp. 635-652.

HILBORN, R. C. (1994), *"Chaos and Nonlinear Dynamics"*. Oxford Press.

HOLMES, P. (1989), "Nonlinear Dynamics, Chaos and Mechanics", *Applied Mechanics Review*, v.43, n.2-5, pp. 23-29.

IOOS, G., HELLEMAN, R. H. G. & STORA, R. (1983), *"Chaotic Behavior of Deterministic Systems"*, North-Holland.

KADANOFF, L. P. (1983), "Roads to Chaos", *Physics Today*, pp. 46-53.

KAPITANIAK, T. (1991), *"Chaotic Oscillations in Mechanical Systems"*, Manchester.

LORENZ, E. N. (1996), *"A Essência do Caos"*, Editora UnB.

LORENZ, E. N. (1963), "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of Atmosferic Science*, v.20, pp. 130-141.

MEIROVITCH, L. (1986), *'Elements of Vibration Analysis"*, McGraw Hill.

MULLIN, T. (1993), *"The Nature of Chaos"*, Oxford Press.

MOON, F. (1992), *"Chaotic and Fractal Dynamics"*, John Wiley & Sons, New York.

MOON, F. (1980), "Experiments on Chaotic Motions of a Forced Nonlinear Oscillator: Strange Attractors", *Journal of Applied Mechanics,* v.47, pp. 638-644.

NAYFEH, A. H. & MOOK, D. T. (1979), *"Nonlinear Oscillations"*, John Wiley & Sons.

OTT, E. (1993), *"Chaos in Dynamical Systems"*, Cambridge Press.

PARKER, T. S. & CHUA, L. O. (1989), *"Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems"*, Springer-Verlag, New York.

RUELLE, D. (1991), *"Chance and Chaos"*, Princeton Univesity Press.

SCHUSTER, H. G. (1989), *"Deterministic Chaos"*, VCH.

SINGER, I. M. & THORPE, J. A. (1967), *"Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry"*, Scott, Foresman & Company.

STEWART, I. (1991), *"Será que Deus Joga Dados? A Nova Matemática do Caos"*, Jorge Zahar Editor.

THOMPSOM, J. M. T. & STEWART, H. B. (1986), *"Nonlinear Dynamics and Chaos"*, John Wiley & Sons, Chichester.

THOMPSOM, J. M. T. (1989), "Chaotic Dynamics and the Newtonian Legacy", *Applied Mechanics Review*, v.42, n.1, pp. 15-25.

WIGGINS, S. (1988), *"Global Bifurcations and Chaos"*, Springer-Verlag, New York.

WIGGINS, S. (1990), *"Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos"*, Springer-Verlag, New York.

WOLF, A., SWIFT, J. B., SWINNEY, H. L. & VASTANO, J. A. (1985) – "Determining Lyapunov Expoents from a Time Series", *Physica 16D*, pp. 285-317.